శ్రీరస్తు — శ్రీరామచంద్రాయనమః

శ్రీ భాస్కరాచార్య విరచిత మగు

వాసనాభాష్య సహిత

లీలావతీ గణితము

నకు

పిడపర్తి కృష్ణమూర్తి శాస్త్రి

రచితమగు

ఆంధ్ర వ్యాఖ్యానము.

పరిశిష్ట టీకా, తాత్పర్య, ఉదాహరణ, ఉపపత్తి,

ప్రశ్న, విశేషాది అనేకవిషయములతో గూడియున్నది.

మొదటికూర్పు 1000

శ్రీ విద్యా ముద్రాక్షరశాలయందు ముద్రితము

విజయనగరం సిటీ.

1936

 [రూప్యాలు 4-0-0

OPINIONS.

Lilavati, an ancient mathematical treatise composed by Bhaskaracharya, is a work of undying interest and inspiration to all our present day Hindu mathematicians. The position which Bhaskara occupies in the galaxy of our ancient mathematicians and astronomers is unique.

A study of old Indian mathematical books is not merely of historical interest to us. Translation of these books into our mother tongue provides us with a very useful instrument in the vernacularisation of studies in our schools and colleges. The extent of mathematical knowledge which this book displays, covers S.S.L.C. and Intermediate syllabuses and a part of the B.A., syllabus.

Mr. Krishnamurty Sastri, besides possessing an extensive and deep knowledge of the ancient mathematical and astronomical treatises, reveals a firm grip on modern mathematical books. His clear exposition and explanations make the book easily intelligible to all.

I hope that teachers and students of mathematics in our Andhra Country will read this book with profit and encourage the author to make this the beginning of a series of such books.

Vizianagram,
D. 2—1—36

(Sd.) SONTI PURUSHOTHAM,
CHIEF LECTURER IN MATHEMATICS.
MAHARAJAH'S COLLEGE.

సి. ఎల్. నరసింహము, బి.ఏ.,బి.ఎల్.   విశాఖపట్నం,

అడ్వొకేటు.   శ్రీ   తే 28—డిసెంబరు 1935.

మాతృభాషాభివృద్ధికి సాధనములుగ ప్రాచీన సంస్కృత గ్రంథములు, వివిధశాస్త్రములకు సంబంధించినవి, పరివర్తింపబడుట మిక్కిలి యావశ్యకమని పలువిధముల చిరకాలమునుండి యుపన్యసించు చుంటిని. శాస్త్రీయ పారిభాషిక శబ్దనిఘంటువు లేమిని, కొలది పరివర్తన ప్రయత్నములును, పలుతెలుగుల బట్టి సంశోధనములు కాక యున్నవి.

ఈ గ్రంథము గోదావరీమండలమునందు వాసిష్ఠాగౌతమీ
్యభాగమున గోపాలపుర సంస్థానములోచేరిన, పొడగట్లపల్లి జానకీ
ంగ్రహారము నివాసముగాగల, పిడపర్తి చినపూర్ణయ్య సిద్ధాంతి
, తృతీయపుత్రుడు కృష్ణమూర్తిశాస్త్రిచే రచించి ప్రకటింపబడి
మఱియు జ్యోతిశ్శాస్త్రమునకు సంబంధించిన గణిత, సిద్ధాంత,
క, ముహూర్త, వాస్తు సంహితాది భాగములందును ఉన్నగ్రంథ
ు గ్రంథమాలగా ప్రకటింపబడగలవు.

విలయువారు :—

దైవజ్ఞభూషణ పిడపర్తి కృష్ణమూర్తిశాస్త్రి,
పొడగట్లపల్లి,
గోపాలపురం పర్ పోస్టు : తూర్పు గోదావరిజిల్లా.

సాహిత్యులు బ్ర॥ పిడపర్తి కృష్ణమూర్తిశాస్త్రిగారు గణితశాస్త్రమునం దిట్టి కొఱంతను బాపదలచి సుప్రసిద్ధ లీలావతీగణితము నాంధ్రీకరించియుండిరి. జ్యోతిశ్శాస్త్రమునందు వారిప్రజ్ఞ యాంధ్రలోకమునకే కాక యితరులకును తెలిసిన విషయమే. గణితశాస్త్రము నందు లేశమాత్రము ప్రవేశములేనివారికి గూడ నతిసులభముగ బోధపడునట్లు వారు రచించిన వ్యాఖ్య వర్ణనాతీతము. ఆంగ్లభాషాభ్యాసవశమున నాభాషాసాంప్రదాయముల ననుసరించిగాని యవగాహన చేసికొన జాలని యాధునికయువజనులకు గూడ నాశ్చర్యజనకముగు రీతిని క్లిష్టవిషయములను కరతలామలకముల గావించిరి.

దీనివలన ప్రాచీనవిద్యాగౌరవోన్నతులు గోచరింపక తప్పవు. గణితశాస్త్రమునందు ముఖ్యముగ బీజగణిత రేఖాగణితములందును ఖగోళశాస్త్రమునందును పూర్వులు సల్పిన కృషి యత్యద్భుతము. పాశ్చాత్యవిజ్ఞానమున కేమాత్రము దీసిపోవునది కాదని తెలిసికొనదగినట్లు బోధింపగల శ్రీ కృష్ణమూర్తిశాస్త్రిగారి బోధనశక్తియు నపారమే. ఇంకను జ్యోతిశ్శాస్త్రగ్రంథముల నాంధ్రమున పరివర్తనముచేసి దేశోపకారము గావించునటుల [illegible] వారికి తగు ప్రోత్సాహము కలిగింపవలసినవిధి యై యున్నది. ఇట్టి యుత్తమగ్రంథము లింకను వివిధశాస్త్రముల వెలువడినయెడల భాషాదారిద్ర్యము తొలగి మాతృభాషయందే యున్నతవిద్య గఱపుటకు విశ్వవిద్యాలయములకు సాధ్యమగును. ఆ సమయమున దేశోన్నతియు, భాషాసేవయు, విద్యార్థిజనమునకు కేవల మనుకరణపద్ధతులే కాక మౌలికపరిశోధనశక్తియు వికాసమును లభ్యములగును. భారతీయులకు స్వతంత్రవిజ్ఞానశక్తి కొలదిమాత్ర మను నపవాదము నశించును. విజ్ఞానసంపద పెంపు వహించును. కళాశాలలయం దిట్టి యుత్తమగ్రంథములు పఠనీయములుగ చేయదగును.

(Sd.) ప్రభల లక్ష్మీనరసింహము,
అడ్వొకేటు.

కృతిపతులు.

శ్రీ మన్మహారాజ రాజశ్రీ శ్రీమద్రాజాధిరాజ శ్రీమజ్జయపుర
సంస్థానాధీశ్వర సాహిత్య సమ్రాట్, డి. లిట్
శ్రీ శ్రీ శ్రీ శ్రీ శ్రీ విక్రమదేవ వర్మ మహారాజావారు.

5 సర్వాశా వల యావకాశ విమలోద్వేల్ల ద్య
శ్రీగోవింద పదారవింద యుగళ ధ్యానానుస
దుర్గత్యస్తాఖిల రాజరా డరికరం దోస్తుంగ క
దీనానాం పరిపోషకో విజయతే శ్రీ విశ్వను

6 నేతా కృతే క్మే నృపపుంగ వోనా
వాచంద్రితారార్క కుటుంబవృద్ధ్యై।
చిరాయు రారోగ్య యశోవితానై
ర్ధియా త్సదా కృష్ణ కృపాతిరేకాత్॥

శ్రీ శ్రీ శ్రీ

Scanned by CamScanner

విషయము. పుట

ప్రశంస.

పురాతన భారతీయవిజ్ఞానపటిమ ఇటీవలివఱకు భారతీయుల సరిగా మనకు తెలియరాకుండుటకు కారణము లనేకములున్నవి. పాశ్చాత్యపరిశోధకులు బయలుదేరి యక్కడక్కడ శిథిలములై పడియున్న ప్రాచీనగ్రంథములను భూస్థాపితములగు శాసనములను వెలికితీసి విమర్శించి సంతరించినారు. వారికి భారతీయులపైన గౌరవాదరములు గలుగజొచ్చినవి. వారివిమర్శనములు ప్రకటింపబడినప్పటి నుండియే మనకు మనపూర్వీకుల సర్వతోముఖ పాండిత్యము తెలియుటకు వీలైనది. ప్రాచీనభారతీయులలో నఖండవిజ్ఞానసంపన్నులగు మహనీయు లనేకులున్నారు. అట్టివారిలో సిద్ధాంతశిరోమణికర్త యగు భాస్కరుడొకడు. అర్థశాస్త్రవిజ్ఞానమందు చాణక్యునకెట్టి కీర్తి వహించి యుండెనో గణిత గ్రహగణిత శాస్త్రవిచారమందు భాస్కరు డంతప్రతిభఁ గాంచెను.

సిద్ధాంతశిరోమణి యొక్క యపూర్వగ్రంథము. ఇందు అంకగణిత బీజగణిత గ్రహగణిత విధానములు సులలితమగు సంస్కృత భాషలో శ్లోకరూపమున వర్ణింపబడియున్నవి. ఈగ్రంథమును విమర్శించిన పాశ్చాత్యపండితులు చలనకలన(Differential Calculus) గురుత్వాకర్ష (Law of Gravitation)ణాది నవీనసిద్ధాంతములకు బీజములీగ్రంథమునందు సూచితములై యున్నవని నిర్ధారించియున్నారు. సిద్ధాంతశిరోమణియందలి అంకగణితాధ్యాయమును గ్రంథకర్త లీలావతియని పేర్కొనెను. ఇందలి శైలి ప్రసన్నమై లాలిత్యముగ నుండుటచే లీలానామము సార్థకమైనది. ఇందు అనేక గణితవిధానములు సంగ్రహముగ వర్ణింపబడియున్నవి. ఇందు అంకగణితముతోపాటు క్షేత్రగణితమును సంబంధించిన త్రిభుజ, చతుర్భుజ, వృత్తాది క్షేత్రములును వర్ణితములై యున్నవి. మనపూర్వ గణిత శాస్త్రవేత్తలు గణితప్రశ్నలకు చేసినను ఉత్తరక్రమప్రభావముగను [illegible]

మనవసరమని భావించినట్లు తోచుచున్నది. ఉపపత్తులనే ప్రధానాం శముగ జూచు పాశ్చాత్యగణితశాస్త్రపద్ధతులకు నస్మదీయసంప్ర దాయము కొంచెము వింతగదోచును.

ఈ "లీలావతి"కి ఆంధ్రానువాదము లతిస్వల్పముగనున్నవి. అవి యును పూర్వసంప్రదాయములనే యవలంబించి ఉపపత్తి విషయము లంతగ సంకుచితములై గ్రంథము సుగ్రాహ్యముకాకుండ తెలుపునట్లు వ్రాయబడినట్లు గానరావు. ఇట్టి సమయమున నామిత్రులు బ్ర|| శ్రీ పిడపర్తి కృష్ణమూర్తిశాస్త్రిగారు లీలావతీవ్యాఖ్యనుగమించి తామువ్రాసిన భాగమును నాకు జూపిరి. ఇందలి గణితపద్ధతి నూతనమార్గము ననుసరించియున్నది. ప్రతిపద్ధతికిని ఉపపత్తియో యుక్తియో వ్రాయ బడినది. ఒకొక్కచో 2,3, ప్రకారములుగను ఉపపత్తులిందు గాన బడుచున్నవి. ఈ వ్యాఖ్య అధునాతనులకు సామాన్యులకు గూడ స్వయముగ గణితము నభ్యసించ సాధనమైయున్నది. కావున దీనిని ప్రకటించుటకు ప్రోత్సాహము చేయబడినది.

ఇందు ప్రతి పరికర్మయందును అనేకనూతనాంశములు చేర్చ బడినవి, ఆయావ్యవహారములందు నూతనవిశేషములు సోపపత్తి కముగ సమర్పబడినవి.

శ్రీ శాస్త్రిగారు నాకు చిరపరిచితులు. వీరు అనాదిగ వృత్తిగ త్రోయ జ్యోతిశ్శాస్త్ర సంపన్నమగు పిడపర్తివంశ సంభవులు. వీరు బాల్యమునుండే సంస్కృతసాహిత్యమును గడించి స్వయముగ జ్యోతిషగ్రంథముల పఠనముచేసినారి గ్రహగణితాదులందు పండి తులకు సహాయపడజాలిరి.

వీరు కులక్రమాగతశాస్త్రవిషయముల నభ్యసించుటకు కాశీ వారణాశియందు రాజకీయ కళాశాలయందు ప్రధానజ్యోతిశ్శా స్త్రాచార్యులగు మ.మ.పం. మురళీధర ఝా వారివద్ద పిదప తెనుగువారిలో అగ్ర గారగు బ్ర|| శ్రీ|| సుబ్రహ్మణ్యశాస్త్రిగారితో కలసి ఉన్నతగ్రంథములు జదివి జ్యోతిశ్శాస్త్రమున విశేషపరిశ్రమము సలిపియున్నారు. వీరికి

ఉభయభాషలందును సాహిత్యపరిశ్రమ మధికము. ఇతరశాస్త్రము లందును పరిచయము గలదు. భారతదేశసుప్రసిద్ధులగు శ్రీశాస్త్రి గారినిగూర్చి విశేషముగ వ్రాయనక్కరలేదు. వీరికి ప్రాచీన నవీన గణితమార్గములు రెండును కరతలామలకములు. కావుననే వీరి ఈ వ్యాఖ్యానము సరళముగను సమగ్రముగను ఒప్పుచున్నది.

సంస్కృతభాషాపరిచయము లేనివారలకును వీరివ్యాఖ్యానము కేవలము స్వతంత్ర గణితగ్రంథముగ నుపయోగింపగలదు.

(1) సంఖ్యానీకము (2) ఘాతిఘాతమూలములు (3) మహోత్తమాపవర్తనము 4) లఘుతమాపవర్త్యము (5) ఆసన్నమూలము (6) ఆసన్నమానములు (7) దశాంశగణితము (8) వ్యుత్పత్తివిచారము ఇవి విశేషముగ చేర్చబడినవి. ఇతరములు విస్తృతముగ వివరింపబడి నవి. వలయుచోట్లయందు ఇతరప్రశ్నములునుగలవు. ఆయాంశసవరణలు బీజగణితము, రేఖాగణితము, త్రికోణమితి, మొదలగు గణితవిశేష ములసంబంధించియున్నవి.

దీనిని పఠించుటచే అభ్యాసములకు చక్కనిగణితపరిచయము గలుగును. గణితజ్ఞులకు నూతనాంశములు పరిచితములగును. ఈ గ్రంథము ప్రస్తుతపాఠశాలలందు పాఠ్యపుస్తకముగ నియోగించుట కెల్లవిధముల తగియున్నది.

ఇతరవిశ్వవిద్యాలయములందు లీలావతీగణితము పాఠ్యపుస్తకముగ నియమింపబడినను. మన యాంధ్రవిశ్వవిద్యాలయమున ఉపేక్షింపబడుట విచారకరముగు విషయము.

శ్రీశాస్త్రిగారికి ఆంధ్రలోకము తగిన అవకాశమునిచ్చుచో వీరు జ్యోతిశ్శాస్త్రమునందును గణితములందును ఇట్టి సరళములగు నాంధ్రవ్యాఖ్య లొనరించి వెలువరింప తగియున్నారు.

21-6-35,
విజయనగరము.

ఇట్లు,
ఏమాని వెంకటరామయ్య,
డి. యస్. సి; (పారిస్) ఏ. యమ్స్. సి.

పీఠిక.

సకలశాస్త్రములకు, గణితశాస్త్రము పునాదివంటిది. గణితసిద్ధాంతసహాయప్రయోగములేక భౌతికశాస్త్రమెట్టిదైనను వృద్ధినొందదు. గణితమునకు అంకము మూలాధారము. అట్టియంకసంజ్ఞకును, దశగుణితస్థాన సంకేతమునకును, అంకగణితమునకును, మన భారతఖండమే జన్మస్థానమనియు తొలుత గంగా గోదావరీ తటప్రాంతస్థితబ్రాహ్మణులే యంకబీజగణితములు సృష్టించిరనియు పాశ్చాత్యపండితులే యంగీకరించియున్నారు.

హైందవప్రాచీనగణితాచార్యులలో ఆర్యభటుడు (క్రీ. శ. 476) బ్రహ్మగుప్తుడు (క్రీ. శ. 598) భాస్కరుడు (క్రీ. శ. 1108) అనువారు సుప్రసిద్ధులు. ఆర్యభటుడు బీజగణితసృష్టికర్తయని కీర్తివహించెను. ధనఋణాంకసంజ్ఞాకల్పనముగూడ వీరివలననే కలుగుచున్నది. వర్గసమీకరణ (Quadratic Equations) విధానము, తత్సంబంధమూలద్వయ సిద్ధాంతము, బ్రహ్మగుప్తునిచే తొలుత కల్పింపబడెను. శ్రేఢీవ్యవహార కుట్టకవ్యవహార విధానకల్పనా నిపుణతయు మనభారతీయగణితాచార్యులకే చెందినది. నేటికి ప్రస్తుత ప్రచారమందుండు నంకగణితములో నన్నివర్గములను మనభారతఖండమే లోకమునకు ప్రసాదించియున్నది. అంకగణితమందు నాటినుండి నేటివరకు నూతనపద్ధతి పుట్టలేదు. ఇక బీజగణితమందు నూతనముగ బయలువెడలిన సిద్ధాంతములు మూడు. అవి ద్విపదసిద్ధాంతము (Binomial Theorem), అంకతత్వము (Theory of numbers), ప్రాయికత్వతత్వము (Theory of Probability). ఇవితప్ప తక్కిన యుచ్చబీజగణిత (Higher Algebra) ప్రకరణములన్నియు భారతీయ గణితపండితప్రోక్తములే.

భారతీయగణితాచార్యులలో భాస్కరాచార్యుడు ప్రముఖుడు. ఇతడు రచించినగ్రంథము సిద్ధాంతశిరోమణి. నిజముగ

ఈగ్రంథము ఈనామమునకు తగియున్నది. ఏలయన దీనిజన్మవర్షమగు క్రీ.శ. 1144 నుండి నేటివఱకు మనభారతఖండమున జ్యోతిషసిద్ధాంతు లందరు దీనినే పఠనమున నభ్యసించుచున్నారు. ఇందు అంకగణి తాధ్యాయము, బీజగణితాధ్యాయము, గ్రహగణితాధ్యాయము, గోలాధ్యాయము, అనునాల్గుభాగములుగలవు. వానిలో నంకగణి తాధ్యాయమునకు ఆచార్యుడు లీలావతియను నామమిడెను.

ప్రస్తుతమాంగ్లభాషయందు అంకగణితము (Arithmetic) అనుశీర్షికక్రింద చర్చింపబడు విషయములన్నియు సంగ్రహముగ లీలావతియందు వర్ణింపబడియున్నవి. అవి క్రమముగ పరికర్మాష్టకము Four rules of Arithmetic, Square, Square root, Cube, (cube root) భిన్నములు (Fractions) వాని ప్రయోగములు (Application to problems of daily life) త్రైరాశికము (Rule of Three) క్షేత్రవ్యవహారము (Mensuration). ఇంతియగాక ఉచ్చ బీజగణితమునకుచేరిన శ్రేఢీవ్యవహారము (Progressions) వ్యక్తి భేద, అంకపాశ వ్యవహారములు (Combination and Permutations) కుట్టకవ్యవహారము (Solutions of Indeterminate Equations) కూడ నీగ్రంథమునందు వర్ణింపబడియున్నవి. కుట్టకవ్యవహారసందర్భమున వితతభిన్న (Continued Fractions) ఆసన్నమాన (Convergent) అనయనములునుసంగ్రహముగసూచింపబడియున్నవి. శూన్యపరికర్మసిద్ధాంతములుకూడ వర్ణితములైయున్నవి.

శూన్యపరికర్మనుగురించి భాస్కరుడుచెప్పిన

శూన్యే గుణకే జాతే ఖం హారశ్చేత్పునస్తదా రాశిః।
అవికృత ఏవ జ్ఞేయస్తథైవ ఖేనోనితశ్చ యుతః॥

అనుసూత్రమునందలి విషయము, ఒకరాశిని శూన్యముచే గుణించి భాగించినయెడల రాశియొక్క మూల్యము మారదని చెప్పు చున్నది. దీనింబట్టి భాస్కరుడు శూన్యమునకుకూడ నంకధర్మములను కల్పించెనని తెలియుచున్నది. కాని ఏదేని ఒకఅంకమును శూన్యముచే

గుణించిన ఫలము శూన్యమని సూత్రప్రథమ పాదమున నుపపాదింప బడియున్నది ఆ ఫలమును శూన్యముచే హరింపలబ్ధము మూలహార్యము !! ఈ రూపములు నవీనగణితజ్ఞులు (Indeterminate form) అనిరి

నవీనగణితములలో చేర్పబడు దశాంశగణితము (Arithmetic of Decimals) లీలావతియందు లేదు. పరిక్రియలకుగాని సిద్ధాంతములకుగాని యుపపత్తిని వ్యక్తీకరించు నాచారము మన పూర్వగణితాచార్యులు పాటింపలేదు.

విషయమంతయు సంకేతపదసమన్విత శ్లోకరూపమున సంక్షేపముగ వ్రాయబడియుండుటచే నీగ్రంథము సాధారణముగ స్వతంత్ర పఠనమునకు లొంగుబాటుకాదు

ఈగ్రంథమునకు సంస్కృతవ్యాఖ్యానము లనేకములుగలవు. ఆంధ్రభాషానువాదములు రెండే కనబడుచున్నవి. వల్లభరాయునిదొకటి, తడకమళ్ళ వెంకటకృష్ణారావుగారిదొకటి. ఈగ్రంథములు రెండును పద్యాత్మకములు. వీనియందును సాంకేతికపదములు విరివిగ గానవచ్చును. పదనిఘంటువును నేర్చికొనినగాని వీనియందలి విషయము లన్వయముకావు.

ఇట్టితరి, అస్మన్మిత్రులగు, బ్రహ్మశ్రీ పిడపర్తి కృష్ణమూర్తి శాస్త్రిగారు లీలావతిని సామాన్యముగ తెలుగు వ్రాయఁజదువ నేర్చినవారికెల్ల స్పష్టముగ తెలియునట్టి సరళమగునాంధ్రమున వివరించి యాంధ్రలోకమునకు మహోపకారమొనర్చిరి. వీరు కులక్రమాగతజ్యోతిషపాండిత్యసంపద్విభూతిచే వెలయు పిడపర్తి వంశసంజాతులు. అదియుగాక జ్యోతిశ్శాస్త్రమునందు (Astronomy) విశేషపరిశ్రమ సల్పియున్నారు. వీరు బాల్యముననే సంస్కృతలీలావతిని స్వతంత్రముగ నభ్యసించి తెలుగువ్యాఖ్యవ్రాసిరి. ఈఅంశమొక్కటియే వీరి కుశాగ్రబుద్ధిని దెల్పుచున్నది.

శాస్త్రిగారి ఆంధ్రలీలావతియందలి విశేషములు :

1. తొలుదొలుత అంకము అనుపదమునకు నిర్వచనము వ్రాయబడెను.

2. ప్రతిఅధ్యాయమునకు నారంభమున పారిభాషికపదముల కర్థమునిచ్చి విషయము సులభముగ నన్వయించుటకు వీలుగ నుపోద్ఘాతము వ్రాసియున్నారు.

3. మూలగ్రహణము చేయునప్పుడు అందును 'మాత్రోపలబ్ధ' మూలనపద్ధతులనుచెప్పి వానినిసుబోధముచేయునుదాహరణము లిచ్చియున్నారు.

4. ఆసన్నమూల (Convergent)మను సాంకేతికమును భిన్నపరికర్మాష్టక ప్రకరణమందె వర్ణించి దానింగనుగొనువిధానమును విశదీకరించుటలో వితతభిన్న (Continued Fractions)విధానమును వర్ణించి, కొన్నివ్యాసపూర్వోదాహరణముల నిచ్చియున్నారు.

5. కుట్టకప్రకరణమందు భాస్కరుడు

పరస్పరం భాజితయో ర్యయోర్యః
శేషస్తయో స్స్యా దపవర్తనం సః।
తేనాపవర్తేన విభాజితౌ యౌ
తౌ భాజ్యహారౌ దృఢసంజ్ఞకౌ స్తః॥

అనుసూత్రమం దపవర్తనపద్ధతిని వివరించియున్నారు. శాస్త్రిగారిపద్ధతిని పరికర్మాష్టకమందే వివరించి మహత్తమాపవర్తన (G. C. M.) మను సాంకేతికమును వ్యక్తపరచియున్నారు.

6. ఆంగ్లగణితగ్రంథసంప్రదాయమును పాటించి దీనివెంబడి లఘుతమాపవర్త్య (L. C. M.) మును దెలియువిధానమును వివరించియున్నారు.

7. దశాంశగణితవిషయములను కొంతవరకు వివరించియున్నారు.

8. సూత్రములకన్నిటికిని యుక్తులజూపియున్నారు. పలుచోట్ల నుపపత్తింజేర్చియున్నారు ఒక్కొకచో 2, 3 ప్రకారములుగను ఉపపత్తిని వ్రాసియున్నారు.

9. అచ్చటచ్చట సందర్భోచితముగ నవీనసిద్ధాంతముల నిముడ్చియున్నారు.

భాష్యాంతరీయశ్లోకసూత్రములతో ప్రసక్తి లేకయే కేవలము శ్రీ శాస్త్రిగారి ఆంధ్రవివరణమునంతను జదివినయెడల చక్కగా నొక ఆంధ్రగణితగ్రంథముగ గనుపట్టును. భాష్యాంతరీయశ్లోకములతో జూచినయెడల భాష్యముగ గనుపట్టుచున్నది. ఈగ్రంథమును రచించుటచేత శాస్త్రిగారు, మనపురాణపురుషుల మేధాశక్తిని వికసించు నిశ్చలపువారిని మేలుకొలిపి, వారియెడ గౌరవాదరముల బురిగొల్పిరి. రెండవది, తెలిసినంతవరకు నవీనవిజ్ఞానమునుచేర్చి గ్రంథస్థ విషయముల విస్తరించిరి.
కావున నీగ్రంథము పఠనీయముగ నేర్పరచుటకు తగియున్నది.

పారిభాషికపదములగురించి యొకమాట:—

ప్రస్తుతము ఆంధ్రమునందు ప్రారంభగణితములు కొన్నిటి ప్రకటింపబడుచున్నవి. భారతీయ పురాతనగణితగ్రంథపరిచయము గ్రంథకర్తలలో చాలమందికి లేకపోవుట వింతకాదు. అందుచే ఎవరికి తోచినట్లువారు పరిభాష కల్పించి ఉపయోగించుచున్నారు.

ఇట్టికార్యము భాషాభివృద్ధి కెంతమాత్ర ముపకరింపదు. కావలసిన పారిభాషికపదములన్నియు మనపురాతన గణిత గ్రంథములందు ధారాళముగ నుపయోగింపబడియున్నవి. అట్టిపూర్వాచార్య వ్యవహృతములగు పారిభాషికపదములను సమయానుగుణముగ వివరించుచు నుపయోగించి శ్రీశాస్త్రిగారు రాబోవు ఆంధ్రగణితగ్రంథకర్తలకు మార్గదర్శకులగుచున్నారు.

బీజగణిత గ్రహగణిత గోళాధ్యాయములకు కూడ నిట్టి యాంధ్రభాష్యముల శాస్త్రిగారు వెలువరింతురని నమ్ముచు నింతట విరమించుచున్నాను.

ఇట్లు,

విజయనగరం, శ్రీమహారాజావారికళాశాల. — వింజమూరి హనుమంతరావు, గణితశాస్త్రోపన్యాసకుడు.

శ్రీ రామచంద్ర పరబ్రహ్మణే నమః

ప్రస్తావన.

ఉపోద్ఘాతే సాంఖ్యవేత్తాయః । సామర్థ్యం కరణే మానవే ।
వ్యక్తావ్యక్త నిబోధాయ । భాస్కరాచార్య మే నమః ॥

ప్రస్తుతము అంకగణిత (Arithmetic) మని వ్యవహరించు గణితమును ప్రాచీనులు వ్యక్తగణితమనియు పాటీగణితమనియు వ్యవహరించిరి. అంకెల చేతను గణించుట నంకగణితమనినట్లు అంకములు స్పష్టముగ వారలసంఖ్యలను బోధించునవియగుటచే ఆగణితము స్పష్ట(వ్యక్త)సంఖ్యల చేసగుటచే నొప్పున వ్యక్తగణితమనియు, అంకెలచే గణించుట పంపాటి(పద్ధతి)లోనిది (జరిగెడిది) అగుటచే పాటీగణితమనియును వ్యవహరించుట అన్వర్థముగానున్నది.

ఈ రెండు సంజ్ఞలను భాస్కరాచార్యులు "పాటీం సద్గణితస్య" అనియు (ఇందలి మొదటి శ్లోకము) "ద్వివిధగణితముక్తం వ్యక్తమవ్యక్తయుక్తం" (శిరోమణి) అనియును వాడియున్నారు.

ఇట్లు తెలియబడని (అవ్యక్తమగు) పరిమాణముగల సంఖ్యలను 'యా' మొదలగు అక్షరముల పరిమాణములుగ గ్రహించి చేయు గణితము అవ్యక్త సంఖ్యల చేసనది కావున అవ్యక్తగణితమనియు (అవ్యక్తం బీజం యస్య తత్ అవ్యక్తబీజం) అవ్యక్తమగు బీజము (కారణము)గ గల గణితము అవ్యక్తబీజము అను వ్యుత్పత్తిచే అవ్యక్తబీజగణితము, బీజగణితమున్నూ అనియును చెప్ప వ్యక్తగణితమునందలి పద్ధతులు కొన్ని యీ అవ్యక్తగణితమునుబట్టి నిర్మింపబడినవగుటచే వ్యక్తగణితమునకు బీజమైనది గావున బీజగణితమనియును వ్యవహరించుట యుక్తియుక్తమగుచున్నది.

ఈ కడపటి అభిప్రాయమును శ్రీభాస్కరాచార్యులు సూచించిరి

"పూర్వం ప్రోక్తం వ్యక్త మవ్యక్తబీజం"
"వ్యక్తస్య కృత్స్నస్య తదేకబీజః" (బీజగణితము)

భాస్కరాచార్యులు.

ఈ వ్యక్తావ్యక్త గణితములు రెండును, గ్రహగణితాధ్యాయము, గోళాధ్యాయము, అను నాలుగు భాగములుగ "సిద్ధాంతశిరోమణి" యను ప్రౌఢసిద్ధాంత గ్రంథమును శ్రీభాస్కరాచార్యులు శా॥ శ ౧౦౬౬ సంవత్సరమున (క్రీ॥ శ॥ 1144 సం॥)న రచించియున్నారు. క్రీ॥ శ॥ 1177 సం॥రమున కరణకుతూహలమను కరణ గ్రంథమును రచించెను. ఈ రెండును ప్రస్తుతము ప్రసిద్ధములు. అందు 'శిరోమణి' భాగమునందును ఇతర దేశములందును ప్రచారము గాంచియున్నది.

[illegible]

[illegible] (Problem relating to daily life) [illegible]

[illegible] (క్రీ॥ శ॥ 1613) [illegible] (క్రీ॥ శ॥ 1492) [illegible] (క్రీ॥ శ॥ 1702) [illegible] (క్రీ॥ శ॥ 1684) [illegible] (క్రీ॥ శ॥ 1597) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{5\times0}{0}$ [illegible]

[illegible] (Higher Algebra) [illegible]

[illegible]

[illegible] (1) [illegible] (2) [illegible] 1 [illegible]

పారిభాషిక పదములు.

[illegible]

[illegible]

[illegible] (G. C. M.) [illegible] (G. C. M.) [illegible] (1858) [illegible]

[illegible] (Combination) [illegible]

[illegible] (Permutation) [illegible]

[illegible]

[illegible] :—

(1) [illegible] 1, 2 [illegible] [illegible] [illegible]

(2) లీలావతీ [illegible] (సంస్కృతము) [illegible]

(3) లీలావతీ [illegible] (సం) [illegible]

(4) లీలావతీ [illegible] (సం) [illegible]

(5) లీలావతీ [illegible] (సం) [illegible]

(6) లీలావతీ [illegible] (సం) [illegible]

(7) లీలావతీ [illegible] ([illegible])

(8) లీలావతి ([illegible]) [illegible] (1888 [illegible]) [illegible]

2, 3 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Scanned by CamScanner

TECHNICAL WORDS.

పారిభాషికపదములు.

అధికకోణము = Obtuse angle.
అపవర్తనము = Reduction to lower terms.
అల్పకోణము = Acute angle.
[illegible] = Irrational number.
[illegible] = Permutation.
[illegible] = Sum of numbers
అంశము = Numerator, Degree.
అర్ధవృత్తము = Semi-circle.
ఆది = The first term of a series.
([illegible])
ఆయతము = Oblong.
ఆధారము, భూమి = Base.
ఆసన్నమూలము = Convergent of a continued fraction.
[illegible] } = Root of an irrational number.
ఆవర్తనము, [illegible] } = Recurring number.
ఆవర్తనదశాంశము = Recurring decimal.
ఇచ్ఛాధనము = Amount required.
ఇచ్ఛాఫలము = Fourth term of a Proportion.
ఉపపత్తి = Proof.
ఋణము = Minus.
[illegible] = Factorial.
కర్ణము = Hypotenuse, diagonal.
కేంద్రము = Centre.
కోణము = Angle.
కోటి = The adjacent side.
కోటిజ్య = Cosine.
కోష్ఠము = Bracket.
క్రాంతివృత్తము = Ecliptic.
[illegible] = Pit.
క్షేత్రఫలము = Area.
గచ్ఛ = Number of terms of a series.
గుణకము = Multiplier.
గుణకారము = Multiplication.
గుణ్యము = Multiplicand.
గుణోత్తరశ్రేఢి = Geometric Progression.
గోళము = Sphere.
గోళపృష్ఠఫలము = Surface of the sphere.
ఘనము = Cube.
ఘనఫలము = Volume.
ఘనమూలము = Cube root.
ఘనవర్గము = The square of a cube.
ఘాతము = Product.
ఘాతమానము = Index, Exponent.
ఘాతోత్పత్తి = Involution.
చతుర్భుజము = Quadrilateral.
చయము = Common difference (వృద్ధి) in an A. P.
చాపము = Arc. (ధనుస్సు)
చాంద్రదినములు = Lunar days.
ఛాయ = Shadow.
ఛేదము = Denominator.
జాత్యము = Right triangle.
[illegible] = Excess of a continued fraction over any one of its convergents.
త్రిఘాతము = Third power.
త్రిభుజము = Triangle.
దశాంశగణితము = Arithmetic of Decimals.
[illegible] = Plane surface.
ధన = Plus.
దృఢభిన్నము = Fraction expressed in its lowest terms.
దినగణము, అహర్గణము = Number of days.
న్యాసము = Working.
[illegible] = Root of a rational number.
నిష్పత్తి, అనుపాతము, [illegible] } = Ratio.
పరిధి = Circumference.
పూర్ణజ్య = Chord.
పృష్ఠఫలము = Area of the surface.
ప్రక్షేపకము = Share of a partner in the capital invested.
ప్రభాగము = Fraction of a fraction.
ప్రమాణము = First term of a Proportion.
ప్రస్తారము = Arrangement.
బిందువు = Point.
[illegible] = Mixed fraction.
భాజకము = Divisor.
భాజ్యము = Dividend.
[illegible] = Sum of differences.
మూలము = Root.
మహత్తమాపవర్తనము = Greatest common Measure.
[illegible] = Amount.
[illegible] = Fractional Index.
మూలోత్పత్తి = Evolution.
యోగము = Sum.
[illegible] = Verification.
రాశి = Sign of the zodiac.
[illegible] = Least common Multiple.
లవము = Numerator.
లంబము = Perpendicular.
వర్గకర్మ = Operation of squaring.
వర్గము = Square.
వర్గమూలము = Square root.
వర్గఘనము = Cube of a square.
వృత్తము = Circle.
[illegible] = Cyclic quadrilateral.
వ్యాసము = Diameter.
వ్యాసార్ధము, త్రిజ్య = Radius.
వ్యస్తగతి = Inversion.
వ్యస్తత్రైరాశికము = Inverse proportion.
వర్గక్షేత్రఫలము = Square area.
వియోజ్యము = Minuend.
వియోజకము = Subtrahend.
[illegible] = Inequality.
వేధ = Height or depth.
[illegible] = Selections or combinations.
శరము, ఉత్క్రమజ్య = Versine.
శీర్షకోణము = Vertical angle.

శంకు=Gnomon.
శ్రేఢి=Series.
సమకోణము=Right angle.
సరళరేఖ=Straight line.
సమచతురశ్రము=Rhombus.
సామాన్యాపవర్తనము=Common-Measure
సావనదినములు=Civil days.
సంకలిత=Added.
సంకలితైక్యము=Sum of series of groups of natural numbers.
సంఖ్యావిభేదములు=Different arrangements.
స్పష్టఫలము=Correct Value.
సూచీశంకు=Cone.
సూచీఖాతము=Conical pit.
సౌరదినములు=Solar days.
స్వాంశభిన్నము=Proper fraction
స్థూలఫలము=Approximate value
స్థూలభిన్నము=Improper fraction

శ్రీరస్తు — శ్రీరామాయనమః

లీలావతీగణితము.

ప్రీతిం భక్తజనస్య యో జనయతే విఘ్నం వినిఘ్నన్ స్మృతః
తం వృన్దారకవృన్దవన్దితపదం నత్వా మతఙ్గాననమ్।
పాటీం సద్గణితస్య వచ్మి చతురప్రీతిప్రదాం ప్రస్ఫుటాం
సంక్షిప్తాక్షరకోమలామలపదైర్లాలిత్యలీలావతీమ్॥ ౧॥

ఆంధ్రవ్యాఖ్యానము.

[illegible] ౧॥
[illegible]
[illegible] ౨॥
[illegible]
[illegible] ౩॥
[illegible]
[illegible] ౪॥
[illegible]
[illegible] ౫॥
[illegible]
[illegible] ౬॥

టీ॥ యః = ఏవిఘ్నేశ్వరుఁడు, స్మృతః = స్మరింపఁబడినవాఁడై, విఘ్నం = విఘ్నము(ను)ను, వినిఘ్నన్ = కొట్టుచున్నాఁడై, భక్తజనస్య = భక్తజనమునకు,

ఇందు 1 కర్షమునకు 80 గుంజలు అగుచున్నవి. ప్రస్తుతము 80 గుంజలు 1 తులము అని వ్యవహరింపబడుచున్నది. కావున నిప్పుడు తులముగా వ్యవహరింపబడునదియే పూర్వము కర్షమని వ్యవహరింపబడుచుండెను అని తోచుచున్నది.

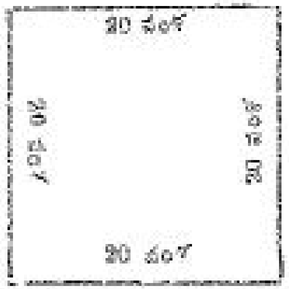
భూమిమానము.

యవోదరై రంగుళ మష్టసంఖ్యై ర్హస్తోంగుళై ష్షడ్గుణితై శ్చతుర్భిః।
హస్తై శ్చతుర్భి ర్భవతీహ దండః క్రోశ స్సహస్రద్వితయేన తేషాం॥ ౫
స్యా ద్యోజనం క్రోశచతుష్టయేన తథా కరాణాం దశకేన వంశః।
నివర్తనం వింశతివంశసంఖ్యైః క్షేత్రం చతుర్భి శ్చ భుజై ర్నిబద్ధం॥ ౬॥

తా॥ యవధాన్యపుగింజలను ఒకదాని ప్రక్కను మరియొకదాని పెట్టి వరుసగా (అడ్డముగా) ఎనిమిదింటిని వరుసగా కూర్చిన నెంతపొడవు యగునో అపొడవు అంగుళమనబడును.

8 యవోదరములు	1 అంగుళము	2000 దండములు	1 క్రోశము
24 అంగుళములు	1 హస్తము	4 క్రోశములు	1 యోజనము
4 హస్తములు	1 దండము	10 హస్తములు	1 వంశము

20 వంశములు నిడివిగల 4 భుజములచే నిర్మింపబడిన క్షేత్రము నివర్తనము. 20 వంశములు పొడవును అంతియె వెడల్పును గల సమచతురశ్ర (స్క్వేర్) మగు భూమికి నివర్తన మనిపేరు.



ఇట్టి క్షేత్రము నివర్తనము.

నివర్తన క్షేత్రమునందు పొడవు 200 హస్తములు. వెడల్పు 200 హస్తములు.

హస్తోన్మితై ర్విస్తృతి దైర్ఘ్య పిండై ర్యద్ద్వాదశాశ్రం ఘనహస్తసంజ్ఞం॥ ౭

వెడల్పు 1 హస్తము. పొడవు 1 హస్తము. పిండము (దళసరి) 1 హస్తము. గలిగి 12 అంచులు గలిగిన పదార్థము ఘనహస్త మని చెప్పబడు చున్నది. పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు వీటియందు అన్నిటియందును సమములైనవానిని గల వస్తువు ఘనపదార్థ మని చెప్పబడును. ఘనాంగుళము, ఘనగజము వెంట ఉండును.

ధాన్యాదికే యద్ఘనహస్తమానం శాస్త్రోదితా మాగధఖారికా సా॥ ౭॥
ద్రోణస్తు ఖార్యాః ఖలు షోడశాంశ స్స్యా దాఢకో ద్రోణచతుర్థభాగః।
ప్రస్థ శ్చతుర్థాంశ ఇహాఢకస్య ప్రస్థాంఘ్రి రాద్యైః కుడవః ప్రదిష్టః॥ ౮॥

తా॥ ధాన్యాదులు కొలుచుటకు ఘనహస్తపరిమాణము గల కొలతను 'ఖారి' అని చెప్పబడును. 1 హస్తము వెడల్పు, అంతియె పొడవు, ఎత్తును గల కొలతను ఒక పదార్థమునందు పోయబడిన ధాన్యములను మాగధదేశమానముచే 'ఖారి' యందురు.

1 'ఖారి' కి ఘనాంగుళములు 24 × 24 × 24 = 13824.

1 ఖారి (ఖారిక)లో	16 వ వంతు	1 ద్రోణము =	ఘనాంగుళములు	864
1 ద్రోణములో	4 వ వంతు	1 ఆఢకము =	,,	216
1 ఆఢకములో	4 వ వంతు	1 ప్రస్థము =	,,	54
1 ప్రస్థములో	4 వ వంతు	1 కుడబము =	,,	13½

4 కుడబములు	1 ప్రస్థము	4 ఆఢకములు	1 ద్రోణము
4 ప్రస్థములు	1 ఆఢకము	16 ద్రోణములు	1 ఖారిక

శేషాః కాలాదిపరిభాషా లోకతః ప్రసిద్ధా జ్ఞేయాః

ఇతి పరిభాషా

[illegible]

సంఖ్యాలేఖనము — సంఖ్యాస్థానములు.

4 ప్ర. [illegible]

	ఒకటి,	రెండు,	మూడు,	నాలుగు,	ఐదు,	ఆరు,	ఏడు,	ఎనిమిది,	తొమ్మిది.
అక్షరము	౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯
అంకెలు	1	2	3	4	5	6	7	8	9

౦ అని శూన్యము (సున్న) [illegible]

[illegible]

[illegible]

ఏక దశ శత సహస్రాయుత లక్ష ప్రయుత కోటయః క్రమశః।
అర్బుద మబ్జం ఖర్వ నిఖర్వ మహాపద్మ శంకవ స్తస్మాత్॥ ౧౦॥
జలధి శ్చాన్త్యం మధ్యం పరార్ధ మితి దశగుణోత్తరాః సంజ్ఞాః।
సంఖ్యాయాః స్థానానాం వ్యవహారార్థం కృతాః పూర్వైః॥ ౧౧॥

[illegible] ఏక, దశ, శత, సహస్ర, అయుత, లక్ష, ప్రయుత, కోటి, అర్బుద, అబ్జ, ఖర్వ, నిఖర్వ, మహాపద్మ, శంకు, జలధి, అన్త్య, మధ్య, పరార్ధ, అని [illegible]

5 ప్ర. 1 = ఏక = ఒకటి = [illegible]

10 = దశ = పది = [illegible] ఒకటి

100 = శత = నూరు ([illegible]) = పదిచే గుణింపబడిన పది

1000 = సహస్ర = వేయి = పదిచే గుణింపబడిన నూరు

10000 = అయుత = పదివేలు = దశగుణిత సహస్రము

100000 = లక్ష = దశగుణితమగు అయుతము. ఇట్లు

ప్రయుత = దశగుణితములగు లక్ష = పదిలక్షలు

కోటి = దశగుణిత ప్రయుతము

అర్బుదము = దశగుణిత కోటి

అబ్జము = దశగుణితార్బుదము

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

సంకలితములు.

6. ప్ర. [illegible]

[illegible]

[illegible]

(9) $\sqrt{\ }$ [illegible]

$\sqrt{27}$ [illegible] $\sqrt{15}$ [illegible]

(10) — ( ) { } [ ] [illegible]

[illegible] $3+4 - 2+3$ [illegible] $(3+4) - (2+3)$ [illegible] $\{3+4\} - \{2+3\}$ [illegible] $[3+4] - [2+3]$ [illegible] $3+4=7$, $2+3=5$ [illegible] $(3+4)-(2+3)=7-5=2$. [illegible]

$$3 \times [\{\overline{5+4} \times \overline{3+2}\} \div \{(\overline{3+7} - \overline{3-1}) + 3\}] + 2$$

[illegible] 3 [illegible] 2 [illegible]

[illegible] $3 \times [\{\overline{5+4} \times \overline{3+2}\} \div (\overline{3+7} - \overline{3-1}) + 3\}] + 2$

$= 3 \times [\{9 \times 5\} \div \{(4-3)+8\}] + 2$

$= 3 \times [45 \div \{2+3\}] + 2 = 3 \times [45 \div 5] + 2 = 3 \times 9 + 2 = 29$

(11) [illegible]

(12) [illegible]

(13) [illegible]

(14) > [illegible] 4 [illegible] 3 [illegible]

[illegible] (1) [illegible]

(2) [illegible]

[illegible]

7 [illegible]

(1) [illegible]

(2) [illegible]

[illegible]

(3) [illegible] 4 > 3 = (4+2) > (3+2)

(4) [illegible] 4+3—(4+2)+(3—2)=?

(5) [illegible]

(6) [illegible]

(7) [illegible] 4×3÷2.

(8) [illegible]

సంకలన వ్యవకలనములు.

8 ప్ర. [illegible]

[illegible]

9. ప్ర. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

10 ప్ర. [illegible] 10 [illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\because \quad 4 = 1 + 1 + 1 + 1 \quad [illegible] \quad 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$\therefore \quad 4 + 5 = (1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9 \quad \therefore 4 + 5 = 9$$

[illegible]

[illegible] (... [illegible] ...) [illegible]

అత్రోద్దేశకః.

అహో బాలే లీలావతి మతిమతి బ్రూహి సహితాన్
ద్వి పంచ ద్వాత్రింశత్ త్రినవతిశత అష్టాదశ దశ|
శతోపేతానేతాన్ అయుతవియుతాంశ్చాపి వద మే
యది వ్యక్తే యుక్తి వ్యవకలనమార్గేఽసి కుశలా ||1||

[illegible] ౨, ౫, ౩౨, ౧౯౩, ౧౮, ౧౦, ౧౦౦ [illegible]
[illegible]

ఇతి సంకలిత వ్యవకలితే.

[illegible] 2, 5, 32, 193, 18, 10, 100 [illegible] 10000 [illegible]
[illegible]

సంకలనోదాహరణము.

193	[illegible] 2, 5, 3, 9, 1.
100	0, 2 [illegible]
32	[illegible]
18	[illegible] 1, 1, 3, 9, 0
10	[illegible] 0 [illegible]
5	[illegible]
2	1 [illegible] 1, 1 [illegible]
యోగము 350	[illegible]

[illegible] 350 [illegible]

సంకలనము చేయవలసిన విధము చెప్పబడును.

[illegible] ([illegible]) [illegible]
[illegible] ([illegible]) [illegible]
[illegible] ([illegible]) [illegible]
[illegible]

వ్యవకలనోదాహరణము.

[illegible]	10000
[illegible]	350
అంతరము	9650

[illegible] 10 [illegible]
[illegible] 10 [illegible]
[illegible] 1 [illegible]
[illegible] 10 [illegible] 1 [illegible] 9 [illegible]
[illegible] 1 [illegible] 1 [illegible]
[illegible]

వ్యవకలన [illegible]

[illegible]

[illegible] 9310 [illegible]

[illegible]

(1)	(2)	(3)	(4)
755	179	82301	7092
75	395	8175	43
287	845	94303	6001
88	151	4008	2578
[illegible]	890	57290	[illegible]
		247068	24147

[illegible]

(1) [illegible]

(2) [illegible] 250 [illegible] 105 [illegible] 65 [illegible] 475 [illegible] ?

(3) [illegible] 150 [illegible] 90 [illegible] 75 [illegible] 105 [illegible] 132 [illegible]

(4) [illegible] 3303 [illegible] 2205 [illegible] 1875 [illegible]

[illegible] 588 [illegible] ?

[illegible]

(1)	(2)	(3)	(4)
5002	3387	5116	[illegible]
498	[illegible]	4998	8076
4504	1088	118	61094

[illegible]

(1) [illegible] 8803 [illegible] 2870 [illegible] ?

(2) [illegible] 283 [illegible] 1080 [illegible] ?

(3) [illegible] 8824 [illegible] 7825 [illegible] ?

(4) [illegible] 4884 [illegible] 598 [illegible] 475 [illegible] 782 [illegible] 375 [illegible] 477 [illegible] 538 [illegible] ?

[illegible]

12. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 10 [illegible] 10 [illegible]

[illegible] 100, 1000 [illegible]

గుణనే కరణసూత్రం సార్ధవృత్తద్వయం

గుణ్యాన్త్యమఙ్కం గుణకేన హన్యాదుత్సారితేనైవ

ముపాన్తిమాదీన్॥ ౧౩॥

టీ॥ గుణకేన = గుణకముచే, గుణ్యాన్త్యం = గుణ్యముయొక్క తుద సంఖ్యనుండు, అఙ్కం = అంకెను, హన్యాత్ = గుణింపవలెను, ఏవం = ఈప్రకారముగా, ఉత్సారితేన = జరుపబడిన గుణకముచే, ఉపాన్తిమాదీన్ = ఉపాంత్యము (తుదియంకెకు సమీపముననున్న యంకె) మొదలగు అంకెలను (గుణింపవలెను).

14. వ్రి. గుణనపద్ధతి :—

సంస్కృత గ్రంథకర్తలనేకులచే గుణనమున్న క్రమగుణనమనియు ఉత్క్రమగుణనమనియు రెండువిధములు. తొలుత అంత్యాంకమును గుణింపవలయునని చెప్పుటచే నిది ఉత్క్రమగుణనప్రకారమని తెలియుచున్నది. కాని ఎడమవైపునుంచి చూచినచో ఏకస్థానము అంత్యాంకమని చెప్పవచ్చును. ఇచట క్రమగుణనమునకును ఈసూత్రమే నుపయోగింపును. క్రమగుణనమునందు తానుభా వము గుణకము కంఠస్థములగు ఎక్కములలో చేరినచో బాగుగ నుపయోగింపును. ఉత్క్రమగుణనమందు పెద్దసంఖ్య గుణకమైనను, ఈపద్ధతి నుపయోగింపవచ్చుగ గలదు. అది యంతియు క్రమముగ చూపెదము.

(1) క్రమగుణనపద్ధతి:—

తొలుత గుణ్యమును వ్రాసి, గుణ్యముయొక్క ఏకాదిస్థానములక్రిందుగ గుణకముయొక్క ఏకాదిస్థానాంకము లుండునట్లు, గుణకమునున్న గీతగీసి క్రింద గీతను గీయవలెను. గుణకము కంఠస్థములగు ఎక్కములలో చేరినసంఖ్యయైనచో గుణకముచే గుణ్యముయొక్క ఏకస్థానాంకమును గుణించి, అగుణనఫలముయొక్క ఏకస్థానాంకమును గీతక్రింద గుణ్యగుణకముల ఏకస్థానాంకములక్రిందుగ నుండునట్లు వ్రాయవలెను. మిగిలినసంఖ్యను చేసిక యుంచుకొనవలెను. పిదప దశస్థానాం

కమును గుణించి ఆగుణనఫలములో చేసికయుంచినసంఖ్యను కలిపి ఆసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకమును ఇదివరలో గీతక్రింద వ్రాయబడిన అంకెకు ఎడమవైపున (గుణ్యగుణకముల దశస్థానాంకములక్రిందుగ) వ్రాయవలెను. మిగిలినసంఖ్యను చేసికయుంచికొనవలెను. పిదప శతస్థానాంకమును గుణించి అందు చేసికయుంచిన సంఖ్యను కలిపి ఆసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకమును శతస్థానాంకములక్రిందుగ వ్రాయవలెను. ఇట్లు తుదవరకును చేయుచు తుదను కలుపగా వచ్చిన సంఖ్య నంతయు వ్రాయవలెను. ఇట్లు చేయగా క్రిందను క్రిందనున్నసంఖ్య గుణనఫలమగును.

గుణకము ఒకటికంటె హెచ్చుసంఖ్యలైనచో:—

గుణకము చెప్పుటలో స్థానవిభాగగుణనము చేయుట యుక్తము.

టీక:— గుణకమును గుణ్యముగ భావించి, గుణ్యముయొక్క ఏకస్థానాంకమును గుణకముగ భావించి, గుణనఫలమును గనుగొనుము. ఈగుణనఫలముయొక్క ఏకస్థానాంకమును గుణ్యగుణకముల ఏకస్థానాంకములకు క్రిందుగనుండునట్లు వ్రాసి మిగిలిన సంఖ్యను చేసికయుంచుము. పిదప గుణ్యదశస్థానాంకమును గుణకముగ భావించి, గుణనఫలము గొనిన, అందు చేసికయుంచిన సంఖ్యనుగలిపి, ఆసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకము గుణ్యగుణకముల దశస్థానాంకము క్రిందుగ నుండునట్లు వ్రాయవలెను. ఇట్లు తుదవరకు చేసిన గుణనఫలము సిద్ధించును. (ఇది క్రమగుణనము).

ఉదా:— గుణ్యము 135 గుణకము 12 గుణనఫల మెంత ?

గుణ్యము	135	గుణ్యముయొక్క ఏకస్థానాంకమగు 5 ను గుణకము 12 చే
గుణకము	12	గుణింపగా వచ్చిన 60 లో 0 ను క్రింద వ్రాసి దశస్థా
గుణనఫలము	1620	నాంకమగు 3 ను 12 చే గుణింపగ 36 లో 6 ను గల

పగా వచ్చిన 42 లో 2 ను దశస్థానమునందు వ్రాసి పిదప శత స్థానమందలి 1 ను 12 చే గుణింపగా 12 లో 4 ను కలిపి 16 ను గుణ్యములో స్థానమునకు ఎడమవైపున కలుపుచేసిగాన దంతయు వ్రాయగా 1620 గుణనఫలమగును.

ఉదాహరణము:— 135 ను 12 చే గుణింపవలయును. [illegible]

[illegible] (4 ప్ర. [illegible]) 12 [illegible] 60 [illegible] 28. [illegible] 38 [illegible] 30 [illegible] 6 [illegible] 42 [illegible] 10 [illegible] 42 = 420 [illegible] 4 [illegible] 2 [illegible] 2 [illegible] 1 [illegible] 12 [illegible] 4, [illegible] 12 + 4 = 16 [illegible] 16 [illegible]

[illegible]:—

(1) [illegible]

(2) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] = [illegible] = [illegible] = [illegible] = [illegible]

15. ప్ర. [illegible]

[illegible]

[illegible] 12 = 8 + 4 [illegible] 8, 4.

$(135 \times 8) + (135 \times 4) = 1080 + 540 = 1620 = 135 \times 12$

[illegible] 135 = 100 + 30 + 5 [illegible] 12 [illegible] (18 [illegible]).

[illegible] $100 \times 12 = 1200$ } [illegible] 1620 [illegible]
$30 \times 12 = 360$ } [illegible]
$5 \times 12 = 60$ } [illegible]

ఉదాహరణము:— 5 ను 4 చే గుణించవలెను. [illegible]

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

5 [illegible] 4 [illegible] 3, 2 [illegible] 3 [illegible] 12 [illegible] 2 [illegible] 4 [illegible] 8 [illegible] 20 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]:— 3 చే 4 ను గుణింపవలయును.

5 [illegible] 2 [illegible] 3 [illegible]
$(5 \times 4) - (2 \times 4) = 3 \times 4 = 20 - 8 = 12$ [illegible].

భక్త్వా గుణః శుద్ధ్యతి యేన తేన లబ్ధ్యా చ గుణ్యో గుణితః ఫలం వా॥ 16॥

టీ. గుణః = గుణకము, యేన = ఏసంఖ్యచే, భక్త్వా = భాగింపబడినదై, శుద్ధ్యతి = నిశ్శేషమగునో, తేన = ఆసంఖ్యచేతను, లబ్ధ్యా = భాగింపగా వచ్చు (లబ్ధ) సంఖ్యచేతను, గుణ్యః = గుణ్యము, గుణితః = గుణింపబడినదై, వా = [illegible], ఫలం = ఫలమగును.

16 ప్ర. గుణ్యగుణకములలో నొకదాని (గుణకము ననుకొందము) [illegible] గుణ్యఫలము [illegible] (గుణ్యగుణక [illegible]) విభజింపవలెను. [illegible] (గుణ్యమును) గుణింపవలెను. [illegible] గుణ్యగుణక [illegible] గుణకము.

ఉదా:—135 × 12.

∵ 4 × 3 = 12 ∴ 4, 3 ఖండములు కల్పింపబడెను.

క్రమముచే 135 × 4 × 3 = 540 × 3 = 1620.

లేక ∵ 6 × 2 = 12 ∴ 135 × 6 × 2 = 1620.

ఉపపత్తి:— గుణ్యము 5 గుణకము 6 అనుకొందము.

3 × 2 = 6 కావున గుణకమునకు 2, 3 అను ఖండములు చేయబడెను.

1 క్రమము

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

2 క్రమము

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

ఈ పైరెండు క్రమములందును ప్రత్యేకము 5 యొక్కయు 6 యొక్కయు గుణ [illegible] చూపబడినవి. [illegible] ప్రత్యేకము 15 ఒకట్లు గలవు. ఇది 5 యొక్కయు 3 యొక్కయు గుణనఫలముతో సమముగనున్నది. [illegible] 3 సమానభాగము [illegible] 5 యొక్కయు, 2 యొక్కయు గుణనఫలముతో సమముగను 10 ఒకట్లు గలవు. [illegible] "5 ను [illegible] 3 చే గుణించి పిమ్మట 2 చే గుణించినను (1 క్రమము చూ) [illegible] 2 చే గుణించి పిమ్మట 3 చే గుణించినను (2 క్రమము చూ) 5 యొక్కయు, 6 యొక్కయు గుణనఫలముతో సమముగ గుణనఫలమగును" అను విషయము స్పష్టమగుచున్నది.

[illegible]

(1) [illegible] గుణకమును [illegible] గుణ్యము [illegible] గుణనఫలము [illegible].

(2) [illegible] గుణనఫలము [illegible].

ఉదా:—5 × 4 × 3 × 2 = 2 × 3 × 4 × 5 = 5 × 3 × 4 × 2

= 3 × 5 × 4 × 2 = 120

సూ॥ ద్విధా భవేద్రూపవిభాగ ఏవం—

టీ. [illegible] = [illegible], రూపవిభాగః [illegible] = [illegible] రూపవిభాగమనియు గుణ్యగుణక [illegible] రూపవిభాగమనియు రూపవిభాగము

[illegible]

(2) [illegible]

ఉదా:— గుణ్యము 6 గుణకము 5 ∴ 5 = 20 ÷ 4.

∴ (6 × 20) ÷ 4 = 6 × 5 = 30 ఇగుచున్నది.

సూ॥ [illegible]

[illegible]

17. ప్ర. [illegible]

[illegible]

[illegible]

ఉదా:— గుణ్యము 135 గుణకము 12

135

12

270 [illegible]

135 [illegible]

1620 [illegible] గుణనఫలము.

(2) ఉదా:— గుణ్య 4356. గుణక 2304.

4356

2304

17432 [illegible] గుణనఫలము.

13074 [illegible]

9036 [illegible] గుణనఫలము.

10340882 [illegible]

[illegible]:— గుణ్యము 5388. గుణక 348.

(4 ప్ర) చే 348 = 300 + 40 + 8 కావున (15 ప్ర) చే

348 [illegible] 300, 40, 8 [illegible] గుణ్యమును

గుణించి [illegible] గుణనఫలము [illegible].

కావున (1) 5388 × 8 = 32208

(2) 5368 × 40 [illegible] 4 [illegible] [illegible]. 40 = 4 × 10 [illegible]

$5368 \times 40 = 5368 \times 4 \times 10 = 21472 \times 10$ (16 [illegible])

$= 214720$ [illegible]

[illegible] $5368 \times 300 = 1610400$

[illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]
32208	32208
214720	21472
1610400	16104
1857328 [illegible]	1857328 [illegible]

[illegible] (17 [illegible]) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] — 6700×810.

6700 [illegible] 810 [illegible] $67 \times 81 = 5427$ [illegible] 5427000 [illegible]

[illegible] — $6700 = 67 \times 100$ [illegible] $810 = 81 \times 10$ (16 [illegible])

$\therefore 6700 \times 810 = (67 \times 100) \times (81 \times 10)$

$= 67 \times 100 \times 81 \times 10 = 67 \times 81 \times 100 \times 10$

$= 67 \times 81 \times 1000 = 5427 \times 1000$ (16 [illegible] 31 [illegible])

[illegible]

[illegible]

[illegible]

18. [illegible]

ఉదా. 135 × 12

[illegible]

12 — 2 = 10 ∴ 135 × 12 = (135 × 10) + (135 × 2) = 1620

[illegible]

12 + 8 = 20 ∴ 135 × 12 = (135 × 20) — (135 × 8) = 1620

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

అత్రోద్దేశకః

బాలే బాలకురంగలోలనయనే లీలావతి ప్రోచ్యతాం
పంచత్ర్యేకమితా దివాకరగుణా అంకాః కతి స్యుర్యది।
రూపస్థానవిభాగఖండగుణనే కల్యాసి కల్యాణిని
ఛిన్నాస్తేన గుణేన తే చ గుణితా జాతాః కతి స్యుర్వద॥

న్యాసః ౧౩౫ గుణ్యః ౧౨ గుణకః

గుణ్యాన్త్యమంకం గుణకేన హన్యాదితి కృతే జాతం ౧౬౨౦

అథవా గుణరూపవిభాగే కృతే ఖండే ౮,౪ ఆభ్యాం పృథగ్గుణ్యే గుణితే యుతే చ జాతం తదేవ ౧౬౨౦

అథవా స్థానవిభాగే కృతే ఖండే ౧,౨ ఆభ్యాం పృథగ్గుణ్యే గుణితే యథాస్థానయుతే చ జాతం తదేవ ౧౬౨౦

అథవాష్ట యుతేన గుణకేన ౨౦ గుణితే అష్టగుణితగుణ్యోనే చ జాతం తదేవ ౧౬౨౦,

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ఉదా:—[illegible] 1337825.

[illegible]

(1)	7854312	(2)	863147	(3)	7854000
	347		3693		23860
	[illegible]		[illegible]		[illegible]

[illegible]

(1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible] 487 [illegible]

(4) [illegible] 18 [illegible]

భాగహారము.

[illegible]

ఉదా:—[illegible]

[illegible]

[illegible]

(5) భాజ్యభాజకములలో భాజకము 10, 100, 1000 ఇత్యాదిసంఖ్యగా నున్నచో [illegible]

ఉదా:—భాజకము 100 భాజ్యము 83300 [illegible] లబ్ధము 833 [illegible] (18 [illegible]) [illegible]

(6) భాజ్యమునకును భాజకమునకును [illegible]

[illegible]

భాజకమును లబ్ధముచే గుణించిన భాజ్యము [illegible] (18 [illegible] 1 [illegible]) [illegible]

ఉదా:—$8 \times 9 = 72$ [illegible] $72 \div 9 = 8$ [illegible] 4 [illegible] $8 \times 9 \times 4 = 288$ [illegible] $72 \times 4 = 288$

$$\therefore (72 \times 4) \div (9 \times 4) = (8 \times 9 \times 4) \div (9 \times 4) = 8$$

[illegible]

21. [illegible] (16 [illegible]) [illegible]

24 [illegible] 4 [illegible]

[illegible] 27 [illegible] 4 [illegible] 3 [illegible] 3 [illegible] 4 [illegible]

[illegible]

ఉదా:—27 [illegible] 4 చే భాగించు [illegible] 24 [illegible] 4 [illegible] 6 [illegible] 3 [illegible] 4 [illegible] 1 [illegible]

[illegible] 27 [illegible] 4 చే [illegible] 27 [illegible] 24; 3 [illegible] 6 [illegible] 3 [illegible] (10 [illegible]) [illegible] 27 [illegible] 4 చే [illegible]

27 ను 4 చే భాగించునపుడు [illegible] 27 [illegible] 4 [illegible] 3 [illegible] 1 [illegible] 2 [illegible] 1 [illegible] 16 [illegible] $3 \times 16 = 48$ [illegible] 48 ని 4 చే భాగించిన 12 [illegible] 12 [illegible]

ఇట్లు [illegible] విభజించుటవలన [illegible] భాగహారమందుండుట తెలియవచ్చును.

అనగా:— భాజకముచే భాజ్యమును భాగించగా శేషము మిగిలినచో వచ్చిన భాజకముచే లబ్ధమును గుణించి అందు శేషమును కలిపిన భాజ్యముతో సమాన [illegible] శేషమును భాజ్యమునుండి తీసివేయగా [illegible] భాజకముచే భాగించినచో నిశ్శేషమగును.

భాగహారే కరణసూత్రం వృత్తమ్

భాజ్యాద్ధరః శుధ్యతి యద్గుణః స్యా
దన్త్యాత్ఫలం తత్ఖలు భాగహారే।

టీ: [illegible] — [illegible], హరః = భాజకము, భాజ్యాత్ = భాజ్యమువలన, అన్త్యాత్ = అంత్యాంకము మొదలుగాని, శుధ్యతి = నిశ్శేషముగ [illegible], తత్ = అదియే, భాగహారే — భాగహారమునందు, ఫలం ఖలు = లబ్ధముగదా!

లబ్ధభాజకముల గుణనము భాజ్యముతో సమానము [illegible] భాజకము భాజ్యమునుండి నిశ్శేషముగ తీసివేయబడిన [illegible] లబ్ధము. కాని భాగహారము అంత్యాంకమునుండి (భాజ్యమునందలి [illegible]) చేయవలయును. లబ్ధమున్ను [illegible] నుండియే వచ్చుచున్నది. అదియే తాత్పర్యము.

33. ప్ర. [illegible]:— [illegible] భాగహారము గుణనమునకు [illegible] (13. ప్ర.) దానిననుసరించి భాగహారపద్ధతి చూపుచున్నది.

గుణ్యము 5378
గుణకము 4582

10756
43024
26890
21512

గుణనఫలము [illegible]

గుణకము [illegible] గుణ్యమును గుణించి [illegible] గుణనఫలము [illegible] భాజ్యముగా [illegible] గుణ్యమును భాజకముగా కల్పించి భాగించినయెడల భాగహారము [illegible] గుణకమే లబ్ధముగా రావలయును.

(శేషము భాజ్యమున్ను భాజకమున్ను తెలిసినప్పుడు లబ్ధము [illegible] తెలియుట [illegible]. [illegible] గుణ్యము (భాజకము) గుణకము (లబ్ధము) [illegible] గుణించిన గుణనఫలము [illegible] భాజ్యము. [illegible] భాజ్యమునందు [illegible] (లబ్ధమునొక్క) అంత్యాంకము [illegible] గుణ్యము (భాజకము) [illegible] నిశ్శేషము [illegible] తెలియుచున్నది. [illegible] భాజ్యమున్ను భాజకమున్ను మాత్రమే తెలిసి లబ్ధమును [illegible].

భాజ్యమందున్న [illegible] భాజకముతో [illegible] [illegible] భాజకముచే [illegible] శేషము [illegible] భాజకము 5378. [illegible] భాజ్యమునందలి [illegible] 24 [illegible] 5378 ని 4 చే గుణించగా 21512 [illegible] తీసివేయబడుచున్నది. [illegible] శేషము. 3129 [illegible] మిగిలిన భాజ్యమునందలి [illegible] 3129776 [illegible] భాజకము [illegible] గుణకము [illegible] 4, 5, 8, 2, అను [illegible] 4582 లబ్ధమగుచున్నది.

(1) ఉదాహరణము.

భాజక భాజ్య లబ్ధి
428) 2083244 (5873
2130
3532
3485
3474
2039
3824
3824
....

(2) ఉదాహరణము.

భాజక భాజ్య లబ్ధి
431) 6794 (15
431
2484
2155
419 శేషము.

కావున $15\frac{419}{431}$ లబ్ధము.

సమేన కేనాప్యపవర్త్య హారభాజ్యౌ
భజేద్వా సతి సంభవే తు ॥ ౧౫॥

టీ॥ సంభవే సతి తు కేనాపి సమేన హారభాజ్యౌ అపవర్త్య వా భజేత్ — సంభవించిన యెడల ఏదైన నొక సమసంఖ్యచేత భాజకభాజ్యములను అపవర్తించి (భాగించి — తగ్గించి — భాగించుటచే చిన్నవానిగా చేసి) భాగింపవలెను. (శ్లో ౧౫ శే ౧. ఫు

౨౬. వ్యా. భాజ్యభాజకములను తగ్గించుటకు ఏ సంఖ్యచేత నిశ్శేషముగ భాగించి లబ్ధములను గ్రహించుట అవసరమో దెలుపుచున్నారము. అట్టి నిశ్శేషముగ భాగించుటకు అవసరమైన గుణములను తెలిసికొనుటకు కొన్ని సులభోపాయము లిచట చూపబడుచున్నవి.

(1) సరిసంఖ్యలన్నియు 2 చే నిశ్శేషముగ భాగింపబడును.

(2) ఏసంఖ్యయొక్క ఏకదశస్థానములందలి అంకెలు 4 చే భాగింపబడునో ఆసంఖ్య అంతయు 4 చే భాగింపబడును. ఏసంఖ్యయొక్క ఏకదశశతస్థానములందున్న సంఖ్య 8 చే భాగింపబడునో ఆసంఖ్యయంతయు 8 చే భాగింపబడును. ఇట్లు పైస్థానములందును గ్రహింపవలెను.

(3) ఏసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానమున ౦ గాని 5 గాని యుండునో ఆసంఖ్య 5 చే భాగింపబడును.

(4) ఏసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానమున సున్నయున్నదో ఆసంఖ్య 10 చేతను భాగింపబడును ఇట్లు రెండుసున్నలున్న 100 చేతను మూడుసున్నలున్న 1000 చేతను భాగింపబడును ఇట్లు ముందును గ్రహింపవలయును.

(5) ఏసంఖ్యయొక్క అంకెలను కూడగా వచ్చిన మొత్తము 3 చే గాని, 9 చే గాని భాగింపబడునో ఆసంఖ్య అంతయు 3 చే గాని, 9 చే గాని భాగింపబడును.

(6) సరిసంఖ్య అగు (సమసంఖ్య)యొక్క అంకెలమొత్తము 3 చే గాని 9 చే గాని భాగింపబడునో ఆసంఖ్య అంతయు 6 చే గాని, 18 చే గాని భాగింపబడును.

ఉదాహరణము.

పూర్వాన్నీత గుణనే తే న గుణితా ఆంకాః కతి స్యుర్వద ॥

అత్ర పూర్వోదాహరణే గుణితాంకానాం స్వగుణచ్ఛేదానాం భాగహారార్థం న్యాసః. భాజ్యః ౧౬౨౦ భాజకః ౧౨ భజనాల్లబ్ధో గుణ్యః ౧౩౫.

అథవా భాజ్యహారౌ త్రిభిరపవర్తితౌ $\frac{౫౪౦}{౪}$ చతుర్భిర్వా $\frac{౪౦౫}{౩}$ స్వస్వహారేణ భక్తే ఫలం తదేవ ౧౩౫.

టీ॥ పూర్వోదాహరణశ్లోకము వలెనే యున్నది.

మనుగుణింపగా వచ్చిన యంకమును గుణకముచే భాగింపగా గుణ్యము వచ్చును. పూర్వోదాహరణమున గుణింపగా వచ్చిన గుణనఫలము 1620 భాజ్యము గుణకము 12 భాజకము.

12) 1620 (135
  12
  ―
  42
  36
  ―
   60
   60
   ―

ఇచట 1620 భాజ్యము 12 భాజకము. పూర్వోక్తప్రకారము భాగింపగా 135 లబ్ధము వచ్చినది.

లేక భాజ్యభాజకములను రెంటిని 3 చే భాగింప లబ్ధము 540 భాజ్యము 4 భాజకము లేక 4 చే భాగింప 405 భాజ్యము 3 భాజకము యగుచున్నది. భాజ్యభాజకములవలన లబ్ధము యొకటే.

అవియును దిగువను చూపబడుచున్నవి.

4) 540 (135
  4
  ―
  14
  12
  ―
   20
   20
   ―
   ..

3) 405 (135
  3
  ―
  10
   9
  ―
   15
   15
   ―
   ..

మరియొక యుదాహరణము

394798 దీనిని 9 చే భాగింపుము.

9) 394798 (43866
  36
  ―
  34
  27
  ―
   77
   72
   ―
   59
   54
   ―
    58
    54
    ―
శేషము 4

ఇట్లు భాగించుట దీర్ఘభాగహారమని చెప్పబడును. ఇట్లు భాజకము చిన్న సంఖ్యయైనచో కంఠస్థముగానైన యెక్కములవలన తెలిసినచో ఈక్రింది భాగహారము చేయవచ్చును. సులభముగ భాగింప వచ్చును.

25. (బ). సులభ భాగహారపద్ధతి:—

(1) భాజ్యభాజకములను పూర్వోక్తరీతిగా వ్రాసి క్రిందుగ గీత గీయుము. భాజకసంబంధమైన యెక్కములనెక్కము సహాయముచే గుణనఫలమును అంతరమును బుద్ధియందు స్థిరము చేసికొని లబ్ధమును గీతక్రింద అంత్యభాజ్యము మొదలు మొదలుకొని క్రిందుగ వ్రాయవలెను. ఇది సులభభాగహార మని చెప్పబడును.

ఎట్లనగా:— 9) 394798

43866 శేషము 4 లాబ్ధము 43866 4/9

(2) ఎక్కములకు మించిన సంఖ్య భాజకసంఖ్యయైనచో (28 వంటిది) దాని భాజకము గుణనఫలముగ నున్నయెడ గుణకములచే భాగింపుము.

ఉదా:— 439721 దీనిని 28 చే భాగింపుము.

భాజకము 28 ఇది 7 యొక్కయు 4 యొక్కయు గుణనఫలము. కాబట్టి

7) 439721
4) 62817 ఇచట 2 శేషము.
  15704 ఇచట 1 శేషము.

ఇచట 15704 లబ్ధము. ఇక మొత్తము శేషము గణింపవలెను.

[illegible]

4) 438721
7) 109680 శేషము 1
15704 శేషము 4

[illegible]

(3) [illegible]

43200) 99578423 (2281 $\frac{37323}{43200}$
86400
131784
86400
353843
345600
80423
43200
శేషము 37323

[illegible]

462) 985704 (2251
834
1517
834
6836
5630
804
432
శేషము 372

[illegible]

25. [illegible]

[illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

(5) [illegible]

[illegible]

ఉదా: — భాజ్యము 985764 భాజకము 432

[illegible] లబ్ధము 2281

(1) 864
భాజ్య 985764
భాజక 432

(2) 864
భాజ్య 121764
భాజక 432

(3) 3456
భాజ్య 35364
భాజక 432

(4) 432
భాజ్య 804
భాజక 432

(5) శేషము 372 [illegible] లబ్ధము $2281\frac{372}{432}$

[illegible] — (1) [illegible] (2) [illegible]

[illegible]

[illegible]

భాగహారప్రశ్నలు.

(1) 8677 ÷ 51

(2) 5885 ÷ 608

(3) 588904 ÷ 903

(4) 80004 ÷ 288

(5) 988608 ÷ 1076

(6) 8080708 ÷ 8050

భాగహారమును సంబంధించిన ప్రశ్నలు.

(1) [illegible] 112 [illegible] ?

(2) [illegible] 5 [illegible] 86 [illegible] ?

(3) [illegible] 7 [illegible] ?

(4) [illegible] 50 [illegible] 14 [illegible] 1 [illegible] 0 [illegible] ?

(5) [illegible]

[illegible]

27. ప్ర. (1) [illegible]

$1 \times 4 = 4$ [illegible] 4 [illegible] 1 [illegible]

$1 \times 4 \times 4 = 16$ [illegible] 2 [illegible]

$1 \times 4 \times 4 \times 4 = 64$ [illegible] 3 [illegible]

[illegible]

[illegible]

(3) [illegible]

[illegible] 16 [illegible] 4

4 [illegible] 64 [illegible] 4

4 [illegible] 256 [illegible]

[illegible]

[illegible] 2, 3, 4 [illegible] 2, 3, 4 [illegible]

(2) [illegible]

1, 4, 9, 16 [illegible] 1, 2, 3, 4 [illegible] 2, 3, 5, 6 [illegible] 31 [illegible] 11 [illegible]

28. ప్ర. [illegible]

(1) [illegible]

[illegible]

కావున ఘాతసూచకము 4 అగుచున్నది.

కనుక $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ రెండుయొక్క చతుర్ఘాతము.

దీనికియుక్తి:—(37 (అ) ఘాతలక్షణమువలన 1 చేత 2 చే గుణించుటచే 2 యను ఏకఘాతమును చేయుటగాక 1 చే గుణ్యమైనను గుణకమైనను గుణకఫలమందు మైలతీలక్షణము లేక రెండనుసంఖ్యయే గుణకఫలమగును. కావున ఘాతసంఖ్యామితస్థానములందు అభీష్టసంఖ్యనుంచి పరస్పరము గుణించుటచే ఘాతఫలమగుచున్నది.

(2) ఒకానొకసంఖ్యయొక్క అనేకఘాతఫలముల గుణకఫలము ఆయా ఘాతసంఖ్యయొక్క ఘాతసూచకాంకముల యోగము ఎంతసంఖ్యయగునో అంత ఘాతముతో సమానమగుచున్నది

ఉదా:—$2^3 \times 2^4 \times 2^2 = 2^9$

ఇచట రెండుయొక్క త్రిఘాత, చతుర్ఘాత ద్విఘాతముల గుణకము రెండుయొక్క నవఘాతముతో సమమగుచున్నది.

ఉపపత్తి:—$2^3 = 2 \times 2 \times 2$ మరియు $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

ఇట్లు $2^2 = 2 \times 2$ కావున $2^3 \times 2^4 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^9$

అనగా 2^{3+4+2}

దీనివలన స్వీకరించినవిషయము సిద్ధించుచున్నది.

అను:—ఒకానొకసంఖ్యయొక్క రెండుఘాతములలో పెద్దఘాతమును చిన్నఘాతముచే భాగింపవలసినప్పుడు పెద్దఘాతసూచకాంకములో చిన్నఘాతసూచకాంకము తీసివేసి అవశిష్టమును ఆఇష్టసంఖ్యకు ఘాతసూచకాంకముగా చేసి ఆఘాతఫలము గనుగొనుము.

ఉదా:—$2^5 \div 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 2 \times 2 = 4$

రెండుయొక్క పంచఘాతము త్రిఘాతముచే భాగింపవలసినప్పుడు ఘాతసూచకాంకముల 5 – 3 అంతరము 2 ఘాతసూచకముగ చేసి ఘాతము చేయవలెను. దీనియుపపత్తి పైసిద్ధాంతోపపత్తియొక్క విపరీతక్రమముచే స్పష్టము.

(3) ఒకానొకసంఖ్యను ఒకఘాతమునుచేసి ఆఘాతఫలమునకు తిరుగ ఘాతము చేయవలసినయెడల ఆఘాతసూచకముల గుణకఫలము ఘాతసూచకముగ చేసి అట్టిఘాతమును చేయుము.

ఉదా:—$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12} = 4096$

దీనియొక్క ఉపపత్తి:—2 యొక్క ఘనముయొక్క చతుర్ఘాతము చేయవలెను. $2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$ = రెండుయొక్క ఘనముయొక్క చతుర్ఘాతము

పై సిద్ధాంతముచే

$$2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

ఇట్టిసిద్ధాంత మగుచున్నది.

(4) రెండుసంఖ్యలలో ప్రతిసంఖ్యను ఒకఘాతమును చేయుము. రెండవదిసంఖ్యను మొదటిసంఖ్యను చేసినఘాతముచే చేయుము. ఆరెండుఘాతములను గుణింపుము. అగుణకఫలము ఆరెండుమూలసంఖ్యలయొక్కయు గుణకఫలముయొక్క అఘాతముతోడ సమమగుచున్నది.

ఎట్లనగా:—$3^3 \times 4^3 = (3 \times 4)^3 = 1728$

ఉపపత్తి:—$3^3 = 3 \times 3 \times 3$ ఇట్లు $4^3 = 4 \times 4 \times 4$

$\therefore 3^3 \times 4^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 3 \times 4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 4$ (10 (క) 2 అను. చూ) $= (3 \times 4)(3 \times 4)(3 \times 4) = (3 \times 4)^3$

అను:—ఘాతము చేయవలసినసంఖ్యను పదిష్టఘన సున్నలున్నచో ఆసంఖ్య చాంపటి సున్నలువిడచి మిగిలినసంఖ్యకు అఘాతమును చేసి సున్న లెన్నియో

[illegible]

[illegible] 400 [illegible]

[illegible] 4.

[illegible] $4^3 = 64$ [illegible] $3 \times 2 = 6$ [illegible]

[illegible] $400^3 = 64000000$ [illegible]

[illegible] $400^3 = (4 \times 100)^3 = 4^3 \times 100^3$

$= 4^3 \times (10^2)^3 = 4^3 \times 10^{2 \times 3}$

$= 4^3 \times 10^6 = 64 \times 1000000 = 64000000$ [illegible]

(5) [illegible]

[illegible] 1 [illegible]

[illegible] 1 [illegible] (27 [illegible])

[illegible] 1 [illegible]

(6) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] (1 [illegible] 2 [illegible])

(1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 234 [illegible]

[illegible]

234
15
184
9
12
5
54756

[illegible] 234 [illegible]

[illegible] 54756 [illegible]

50. ప్ర. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

234
4
12
9
184
16
54756

[illegible]

* [illegible]

[illegible]

61. [illegible] —

(1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

(5) [illegible]

(6) [illegible]

(1) ఉదా : —

		వర్గించవలసినసంఖ్య 8796
(1)	పంక్తి	105516
(2)	పంక్తి	35741
(3)	పంక్తి	1109
(4)	పంక్తి	64
	వర్గము	77369616

(2) ఉదా : —

		వర్గించవలసినసంఖ్య 45023
(1)	పంక్తి	370122
(2)	పంక్తి	18004
(3)	పంక్తి	425
(4)	పంక్తి	10
	వర్గము	2027070529

(1) [illegible]

[illegible]

(2) [illegible] 4 [illegible]

[illegible] 4 [illegible]

దీని ఉపపత్తి:— 84 [illegible]

[illegible]

[illegible]

42. ప్ర. [illegible] 2 [illegible]

ఉదా:— 96 [illegible]

96 [illegible] 90, 6 [illegible]

పద్ధతి [illegible]

$$96^2 = \{(90 \times 6) \times 2\} + 90^2 + 6^2 = (540 \times 2) + 90^2 + 6^2$$

$$= 1080 + 8100 + 36 = 9216.$$ ఇది 96 యొక్క వర్గము.

ఉపపత్తి:— $96^2 = 96 \times 96$ (15 ప్ర) చే

$$96 \times 96 = (90 + 6) \times 96 = (90 \times 96) + (6 \times 96)$$ అగును

$$= 90\,(90 + 6) + 6\,(90 + 6) = (90 \times 90) + (90 \times 6) + (6 \times 90)$$

$$+ (6 \times 6) = 90^2 + 6^2 + (90 \times 6 \times 2) = 96$$ యొక్క వర్గము.

[illegible]

[illegible]

ఉదా:— 16 [illegible] ?

$16 = 20 - 4$ [illegible]

$$(20^2 + 4^2) - 20 \times 4 \times 2 = 16^2$$

$$\therefore (400 + 16) - 160 = 416 - 160 = 256 = 16^2$$

[illegible] (15 [illegible]) [illegible]

43. ప్ర. [illegible]

[illegible]

ఉదా:— 84 [illegible]

[illegible] 4 [illegible]

$$84^2 = (84 - 4)(84 + 4) + 4^2 = (80 \times 88) + 16$$

$= 7040 + 16 = 7056$ ఇది 84 యొక్క వర్గమైనది.

ఉపపత్తి:— $84^2 = 84 \times 84$

(15 ప్ర) చే $(80 + 4) \times 84 = (80 \times 84) + (84 \times 4)$.

$= (80 \times 84) + (80+4)4 = (80 \times 84) + (80 \times 4) + 4^2;\ 80 = 84-4$

$\therefore$ [illegible] $(84 \times 80) + (4 \times 80) = (84+4) \times (84-4)$ (15 [illegible])

$\therefore 84^2 = (84+4) \times (84-4) + 4^2 = 88 \times 80 + 16 = 7056$

[illegible]

(1) [illegible]

(2) [illegible]

([illegible])

34. [illegible] —(29, 30, 31 [illegible])

8796 [illegible] (29 [illegible]) [illegible]

$8796^2 = 8790^2 + (8790 \times 6 \times 2) + 6^2$

[illegible] $8790^2 = 8700^2 + (8700 \times 90 \times 2) + 90^2$

[illegible] $8700^2 = 8000^2 + (8000 \times 700 \times 2) + 700^2$

$8000^2 = (8000)^2$

$$
\begin{aligned}
8796^2 = & \quad (8790 \times 6 \times 2) + 6^2 \\
& + (8700 \times 90 \times 2) + 90^2 \\
& \quad (8000 \times 700 \times 2) + 700^2 \\
& + \quad 8000^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \quad 8790 \times 12 + (6 \times 6) \\
& + 8700 \times 180 + (90 \times 90) \\
& + 8000 \times 1400 + (700 \times 700) \\
& + \quad (8000 \times 8000)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{అ}) = & \quad 105480 + 36 \\
& + 1566000 + 8100 \\
& + 11200000 + 490000 \\
& + \quad 64000000
\end{aligned}
$$

(1)	(2)
36	36
+ 105480	10548
+ 8100	81
+ 1566000	1566
+ 490000	49
+ 11200000	112
+ 64000000	64
77369616	77369616

(1)	(2)
105516	105516
1574100	15741
11690000	1169
64000000	64
77369616	77369616

(అ) [illegible] (ఇ) (ఈ) [illegible]

(ఇ) [illegible] (1) [illegible] (2) [illegible] (29 [illegible] 30 [illegible]) [illegible]

(౧) సంఖ్యాసమానాంకములతో (౨) [illegible] (౩) [illegible] [illegible] (३० प्र) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 1 [illegible] 14 [illegible] 130 [illegible] 67 [illegible] 10005 [illegible]

$9^2 = 81$

$14^2 = 196$

$297^2 = 88209$

$10005^2 = 100100025$

[illegible]

౩౫. [illegible] 1 టి మొదలు 50 వరకు [illegible]

[illegible]

సంఖ్య	వర్గము	సంఖ్య	వర్గము	సంఖ్య	వర్గము	సంఖ్య	వర్గము	సంఖ్య	వర్గము
1	1	11	121	21	441	31	961	41	1681
2	4	12	144	22	484	32	1024	42	1764
3	9	13	169	23	529	33	1089	43	1849
4	16	14	196	24	576	34	1156	44	1936
5	25	15	225	25	625	35	1225	45	2025
6	36	16	256	26	676	36	1296	46	2116
7	49	17	289	27	729	37	1369	47	2209
8	64	18	324	28	784	38	1444	48	2304
9	81	19	361	29	841	39	1521	49	2401
10	100	20	400	30	900	40	1600	50	2500

వర్గమూలము.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(8) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(1) 4 [illegible] 2

(2) $\sqrt{9} = 3$

(3) $\sqrt{81} = 9$

(4) 100 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

42 ను తీసివేయగా శేషము మిగులలేదు. [illegible] పూర్తియైనది. [illegible] 7 ను రెట్టించి 14 ను పంక్తి 58 లో [illegible] పంక్తి. [illegible] 2 చే భాగించ 237 [illegible] వర్గమూలమగును.

37. ప్రి. పూర్వపద్ధతి ననుసరించి మరియొక వర్గమూలపద్ధతి.

(1) [illegible]

(2) (36 ప్ర. 1 భా. 2 భా. [illegible]) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

(5) [illegible]

[illegible]

(6) [illegible]

(7) [illegible]

(8) [illegible]

(9) [illegible]

ఉదా:—148225 దీనికి వర్గమూల మెంత?

వర్గము	వర్గమూలము
148225 (	285
9	
48) 582 (	8
544	
765) 3825 (	5
3825	

[illegible]

(2) ఉదా:—1096209 దీనికి వర్గమూల మెంత?

వర్గము	వర్గమూలము
1096209 (	1047
1	
20) 9 (	0
0	
204) 962 (	4
816	
2087) 14609 (	7
14609	

[illegible]

88. [illegible]

[illegible]

మూలసంఖ్య	8798
(1) పం.క్తి	105516
(2) పం.క్తి	15741
(3) పం.క్తి	1103
(4) పం.క్తి	64
వర్గము	77368816

[illegible]

[illegible] $(80 \times 7 \times 2) + (7 \times 7) = (80 \times 2 + 7) \times 7 = 167 \times 7 = 1169$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

39. [illegible]

(23 [illegible])

[illegible]	234
(1) [illegible]	16
(2) [illegible]	184
(3) [illegible]	9
(4) [illegible]	12
(5) [illegible]	4
[illegible]	54756

(30 [illegible])

[illegible]	234
(1) [illegible]	4
(2) [illegible]	12
(3) [illegible]	9
(4) [illegible]	184
(5) [illegible]	16
[illegible]	54756

[illegible]

```
[illegible] 54756 ( 2
             4
        4 ) 14 ( 2
            12
            27
             9
       43 ) 185 ( 4      [illegible]
            184              4
             16              8
             16              8
             ..          2 ) 468
                   [illegible] 234
```

[illegible]

[illegible]

	125
(1) [illegible]	1
(2) [illegible]	6
(3) [illegible]	12
(4) [illegible]	8
(5) [illegible]	2160
(6) [illegible]	900
(7) [illegible]	125
[illegible]	1953125

[illegible] (1) [illegible] 1 × 2 × 3 = 6 [illegible] 4 × 1 × 3 = 12 [illegible]

$12^2 \times 5 \times 3 = 2160$ మధ్యపంక్తి. $5^2 \times 12 \times 3 = 900$ ఆరవపంక్తి 5 యొక్క ఘనము 7 వ పంక్తి. ఈ పంక్తులు క్రింది కోష్ఠకమందు వ్రాయుచు స్థానక్రమము నుండునట్లుగా వ్రాయుచు కలుపుచుండిన కలుపగా వచ్చినభాగము 1953125 ఇచ్చినసంఖ్య 125 కు ఘనమగుచున్నది. ఇట్లు అంకెలను గ్రహించవలెను.

41. ప్ర. ఉపపత్తిచే శేషస్థానమునుండి చేయుట.

సూత్రమునందు "అన్త్యాంకవా ఘన పూర్వ ..." అనుచో గలదు. ఆదేశము విశదీకరించబడలేదు, అట్లగుటచే అన్త్యాంకము (ఏకస్థానాంకము) నుండి చేయుటవలన పూర్వముచెప్పిన రీతిగానే దశస్థానాంకము గ్రహించినచో ప్రయోజనము గాదు. కాబట్టి ఆపద్ధతి వివరించబడుచున్నది.

(1) మొదట ఏకస్థానాంకముయొక్క ఘనము. (1) పంక్తి.

(2) ఏకస్థానాంకవర్గమును దశస్థానాంకమును వినుపగానైన సంఖ్యచే గుణించి దానిని 3 చే గుణించి (2) పంక్తి.

(3) ఏకస్థానాంకమును వినుపగానైన సంఖ్యయొక్క వర్గమును ఏకస్థానాంకముచే గుణించి దానిని 3 చే గుణించి (3) పంక్తి.

(4) మిక్కుటి ఘనము చేయవలసిన సంఖ్యలోని ఏకస్థానాంకమును విడిచి మిగిలినసంఖ్యను ఘనము చేయవలెను. ఆ సంఖ్యాస్థానమునుండి అంకెలనేకస్థానాంకస్థానము నాలవపంక్తి ఇట్లు పూర్తి ప్రకారము పంక్తులు వ్రాయవలెను.

(5) ఇట్లు ఘనించవలసినసంఖ్యయందలి అంకెలన్నియు ముగియువరకు తిరుగతిరుగ క్రియను చేయవలెను. పిదప వెనుకటి విధమున అంకెల యొక్క ఘనమును గ్రహించవలెను.

(6) ఆపంక్తియొక్క దశస్థానాంకము క్రిందుగ వ్రాసినపంక్తియొక్క ఏకస్థానాంకముక్రింద పంక్తుల నున్నదని వ్రాయుచు కలిపినచో అట్లు కలుపగానైన మొత్తము అభీష్టసంఖ్యయొక్క ఘనమగును.

ఉదా:— 125 కు ఘనము.

(40 ప్ర) పద్ధతిచే వ్రాయబడిన పంక్తులు ఈ (41 ప్ర) పద్ధతిచే తల క్రిందుగ వచ్చుచున్నవి. అనగా (40 ప్ర) చే ఆ [illegible] క్రిందినుండి లెక్కించగా 1, 2, 3 మొదలగు పంక్తులు (41 ప్ర) చే పైనుండి 1, 2, 3 మొదలగు పంక్తులుగ నుండును. కావున రెండువిధములుగను చూపబడుచున్నవి.

(40 ప్ర చే) 125	(41 ప్ర చే) 125
1	125
6	900
12	2160
8	8
2160	12
900	6
125	1
1953125	1953125

ప్రతిపంక్తియొక్కయు వివరమునుగూర్చి (40 ప్ర) చూడుము.

42. ప్ర. పైపద్ధతిననుసరించి ఘనమునందు తొమ్మిదిగుణకపద్ధతి.

(1) ఘనించవలసినసంఖ్యక్రింద గీతను గీయుము.

(2) ఘనము చేయవలసినసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకముయొక్క ఘనమును గుణించి ఆసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకమునుమాత్రము గీతక్రింద వ్రాసి మిగిలిన సంఖ్యను వేరుగ నిలుపుకొనుము.

(3) మిక్కుటి ఘనము చేయవలసిన సంఖ్యను ఆరంభ్యయొక్క ఏకస్థానాంకముచే గుణించి ఆగుణలబ్ధమును ఘనించవలసిన సంఖ్యయందు ఏకస్థానాంకమును విడువగానైనసంఖ్యచే గుణించి దానిని తిరుగ 3 చే గుణించి అంకెల [illegible] [illegible] అట్లుచేసి వచ్చినమొత్తపుసంఖ్యను వేరుగ నిలుపుకొని క్రింది వ్రాసినవానికి ఎడమప్రక్క పూర్వ రీతిగ క్రియ చేయుము.

(4) ఏకస్థానాంకమును విడిచి మిగిలినసంఖ్యను ఘనించవలసిన సంఖ్యగా గ్రహించి పూర్వముకలుపుచు [illegible] గమనింపుము.

(5) ఈ రెండవపంక్తిని మొదటిపంక్తిలో 3 అంకెలను విడచి క్రిందుగ అనగా పైపంక్తియొక్క సహస్రస్థానాంకము క్రిందుగ క్రిందపంక్తియొక్క ఏకస్థానాంకము వచ్చునట్లు వ్రాయవలెను.

(6) ఇట్లు చివరనున్న ఒక్కొక్కయంకెను విడచుచు మిగిలినసంఖ్యను ఘనీకరింపదగినసంఖ్యగా భావించుచు పంక్తిని గనుగొనుచు పైపంక్తియొక్క సహస్రస్థానాంకముక్రిందుగ క్రిందిపంక్తియొక్క ఏకస్థానాంకముండునట్లు వ్రాయుచు కుదిరినట్లు చేయవలెను.

(7) తుదకు ఎడమవైపుయంకె మొదటిదగు అంకెయొక్క ఘనము మాత్రమే కడపంక్తి యగును.

(8) అన్నిపంక్తులయొక్కయు యోగము ఘనము నగును.

ఉదా:—125 యొక్క ఘనము.

		ఘనీకరింపదగినసంఖ్య 125
(1)	పంక్తి	225125
(2)	పంక్తి	728
(3)	పంక్తి	1
		1953125

వివరము:—ఏకస్థానాంకము 5 దీనియొక్క ఘనము 125 ఇందలి ఏకస్థానాంకము 5 ను క్రిందుక్రింద వ్రాసి మిగిలినసంఖ్య 12 ను చేతిలో ఉంచవలెను.

ఘనీకరింపదగినసంఖ్య 125 ను ఏకస్థానాంకము 5 చే గుణింప 125 × 5 = 625 దీని ఘనీకరింపదగినసంఖ్యయందలి ఏకస్థానాంకము విడువగా మిగిలినసంఖ్య 12 చే గుణింప 625 × 12 = 22500 ఇందు తొలుత విడచిపెట్టబడినసంఖ్య 12ను కలుప 22500 + 12 = 22512 దీనిని క్రిందక్రింద ఘనముగా వ్రాసిన 5 కు ఎడమవైపున చేర్పగా 225125 మొదటిపంక్తి యగును.

ఇప్పుడు ఏకస్థానాంకము 5 ను విడచి మిగిలినసంఖ్య 12 ను ఘనీకరింప వలసినసంఖ్యగా భావించి రెండవపంక్తిని గనుగొనవలయును.

ఇందలి ఏకస్థానాంకము 2 దీనియొక్క ఘనము 8 ఇది రెండవపంక్తిలో ఏకస్థానాంకము. ప్రస్తుతము ఘనీకరింపదగినసంఖ్య 12 ను ఇందలి ఏకస్థానాంకము 2 చేతను ఏకస్థానాంకము 2 ను విడువగా మిగిలినసంఖ్య 1 చేతను 3 చేతను గుణింప 12 × 2 × 1 × 3 = 72 దీనిని ఇదివరకు వ్రాసినదానికి 8 యొక్క ఎడమ వైపున చేర్పగా రెండవపంక్తి 728 అగుచున్నది.

ఇప్పుడు 2 ను కూడ విడువగా 1 కి మిగిలెను. దీనియొక్క ఘనము 1 ని మూడవపంక్తిగ వ్రాయవలెను.

ఒకపంక్తిక్రింద మరియొకపంక్తి 3 స్థానములు జరిపి వ్రాయవలెను. అన్నిటియొక్కయు యోగము ఘనమగుచున్నది.

48. ప్ర. మిశ్రమములకు ఉపపత్తి:—

(1) ఉదా:—27 యొక్క ఘనము గనుగొనవలయును.

$27^3 = 27 \times 27 \times 27 = 27 \times 27 \times (20 + 7)$ (చూ. 15 ప్రే) ఇట్లు $= (20 + 7) \times (20 + 7) \times 27 = \{20^2 + (2 \times 7 \times 20) + 7^2\} \times 27$ (చూ 32 ప్రే) $= \{20^2 + (2 \times 7 \times 20) + 7^2\} \times (20 + 7) =$ $20^3 + (20^2 \times 7 \times 3) + (7^2 \times 20 \times 3) + 7^3 = 8000 + 8400 + 2940 +$ 343 లెక్కించగా ఘనము.

ఈసంఖ్యలను ఒకదానిక్రింద నొకటి ఎడమవైపునుండి క్రిందుగ సున్నల తోడను సున్నలను తీసివేసియు వ్రాసి కలిపినచో ఫలితములో భేదముండదని స్పష్టము గానగును.

సున్నలతోడ	సున్నలనుతీసి	
8000	8	(1) పంక్తి
8400	84	(2) పంక్తి
2940	294	(3) పంక్తి
343	343	(4) పంక్తి
19683	19683	

పిదప (40 ప్రే) ఉపపత్తి సులభముగనున్నది.

[illegible]

[illegible]	[illegible]	
343	343	(1) [illegible]
2940	294	(2) [illegible]
8400	84	(3) [illegible]
8000	8	(4) [illegible]
19683	19683	

[illegible] (41 [illegible]) [illegible]

[illegible]

$20^3 + (20^2 \times 7 \times 3) + (7^2 \times 20 \times 3) + 7^3$

$= 20^3 + (20 \times 20 \times 7 \times 3) + (7 \times 7 \times 20 \times 3) + 7^3$

$= 20^3 + (20 + 7) \times 20 \times 7 \times 3) + 7^3$

$= 8000 + 27 \times 20 \times 7 \times 3 + 343$

$= 8000 + 11340 + 343 = 8000 + 11683.$

[illegible]

[illegible]	[illegible]
11683	11683
8000	8
19683 [illegible]	19683 [illegible]

[illegible] (42 [illegible]) [illegible]

[illegible] $11683 = \begin{matrix} 343 \\ 11340 \\ \hline 11683 \end{matrix} = \begin{matrix} 343 \\ 1134 \\ \hline 11683 \end{matrix}$ [illegible] (12 [illegible]) 2, 3 [illegible]

[illegible]

[illegible] — 125 [illegible]

$125^3 = 125 \times 125^2$ (32 [illegible]) [illegible]

$125^2 = 120^2 + 120 \times 5 \times 2 + 5^2$ [illegible] (15 [illegible]) [illegible]

$125 \times 125^2 = (120 + 5) \times (120^2 + 120 \times 5 \times 2 + 5^2)$

$= (120 + 5) \times (100^2 + 100 \times 20 \times 2 + 20^2 + 120 \times 5 \times 2 + 5^2)$

[illegible]

$= (120 \times 100^2) + (120 \times 100 \times 20 \times 2) + (120 \times 20^2) + (120^2 \times 5 \times 2) + (120 \times 5^2) + (100^2 \times 5) + (100 \times 20 \times 2 \times 5) + (20^2 \times 5) + (120 \times 5^2 \times 2) + 5^3$

$= (100 + 20) \times 100^2 + (100 + 20) \times 100 \times 20 \times 2 + (100 + 20) \times 20^2 + 120^2 \times 5 \times 2 + (100^2 \times 5) + (100 \times 20 \times 2 \times 5) + (20^2 \times 5) + 120 \times 5^2 + 120 \times 5^2 \times 2 + 5^3$

$= 100^3 + (100^2 \times 20 \times 2 + 100^2 \times 20) + (20^2 \times 100 \times 2 + 20^2 \times 100) + 20^3 + 120^2 \times 5 \times 2 + (100^2 + 20^2 + 100 \times 20 \times 2) 5 + 120 \times 5^2 \times 3 + 5^3$

$= 100^3 + 100^2 \times 20 \times 3 + 20^2 \times 100 \times 3 + 20^3 + 120^2 \times 5 \times 3 + 120 \times 5^2 \times 3 + 5^3$

$= (1)\ 100^3$

$(2) + 100^2 \times 20 \times 3 + 20^2 \times 100 \times 3 + 20^3$

$(3) + 120^2 \times 5 \times 3 + 120 \times 5^2 \times 3 + 5^3$

[illegible] $(2)\ 100^2 \times 20 \times 3 + 20^2 \times 100 \times 3 + 20^3$

$= 100 \times 100 \times 20 \times 3 + 20 \times 20 \times 100 \times 3 + 20^3$

$= (100 + 20) \times 100 \times 20 \times 3 + 20^3$

$= 120 \times 100 \times 20 \times 3 + 20^3$

[illegible] $(3)\ 120^2 \times 5 \times 3 + 120 \times 5^2 \times 3 + 5^3$

$= (120 + 5) \times 120 \times 5 \times 3 + 5^3$

$= 125 \times 120 \times 5 \times 3 + 5^3$ [illegible]

ఇట్లు సిద్ధించినఖండములు

(1) 100^3 = 1000000 = 1000000

(2) $120 \times 100 \times 20 \times 3 + 20^3$ = + 720000 + 8000 = 728000

(3) $125 \times 120 \times 5 \times 3 + 5^3$ = + 225000 + 125 = 225125

ఈ (1) (2) (3) ఖండములను [illegible] [illegible] కలిపినచో

[illegible]	[illegible]	
225125	225125	(1) ఖండి
728000	728	(2) ఖండి
1000000	1	(3) ఖండి
ఘనము 1953125	ఘనము 1953125	

[illegible] ఈ (3) ఉదాహరణము (43 ప్ర) పద్ధతి స్పష్టముగా [illegible] ఉపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది.

ఖండాభ్యాం వా హతో రాశి స్త్రిఘ్నః ఖండఘనైక్యయుక్ ॥

[illegible] = 3 చే [illegible] (ఘనమగును).

44. ప్ర. [illegible]

ఉదా:— 27 యొక్క ఘనము కావలయును.

27 = 20 + 7 ఇట్లు రెండుఖండములుగా చేయవలెను.

ఇష్టసంఖ్య 27 ను [illegible] 20 చే గుణించ 27 × 20 = 540 దీనిని [illegible] ఖండము 7 చే గుణించ 540 × 7 = 3780 దీనిని 3 చే గుణించ 3780 × 3 = 11340 [illegible] 20 యొక్క ఘనము 8000 [illegible] 7 యొక్క ఘనము 343 వీటిని కలుప 11340 + 8000 + 343 = 19683 ఇష్టసంఖ్య 27 యొక్క ఘనము.

ఉపపత్తి:—(43 ప్ర) 1 [illegible]

$20^3 + (20+7) \times 20 \times 7 \times 3 + 7^3$ [illegible]

$27 \times 20 \times 7 \times 3 + 20^3 + 7^3$ ఇట్లు [illegible] స్పష్టమగుచున్నది.

వర్గమూలఘనః స్వఘ్నో వర్గరాశేర్ఘనో భవేత్ ॥

[illegible] = వర్గరాశియొక్క, వర్గమూలఘనః = వర్గమూలముయొక్క ఘనము, [illegible] = ఘనము, భవేత్ = అగుచున్నది.

45. ప్ర. [illegible]

ఉదా:— 36 యొక్క ఘనము కావలయును.

36 యొక్క వర్గమూలము 6 దీనిఘనము 6 × 6 × 6 = 216 దీనియొక్క వర్గము 46656 [illegible] 36 యొక్క ఘనమగుచున్నది.

[illegible]:—

$36 = 6^2$ ∴ $36^3 = (6^2)^3$ (28 ప్ర 3 సూ) చే

$36^3 = 6^{2 \times 3} = 6^{3 \times 2} = (6^3)^2$ = 46656 అగుచున్నది.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$(1)\quad 9^3 = 729 \qquad (2)\quad (3^3)^3 = 27^3 = 19683$$

$$(3)\quad (5^3)^3 = (125)^3 = 1953125$$

$$9 = 4 + 5 \therefore 9 \times 4 \times 5 \times 3 + 4^3 + 5^3 = 540 + 189 = 729$$

$$27 = 20 + 7 \therefore 27 \times 20 \times 7 \times 3 + 20^3 + 7^3 = 11340 + 8343 = 19683$$

$$4^3 = ((\sqrt{4})^2)^3 = (2^3)^2 = 8^2 = 64$$

$$9^3 = (3^3)^2 = 27^2 = 729$$

46. [illegible] 10 [illegible] 1 [illegible] 10 [illegible]

సంఖ్య	ఘనము	సంఖ్య	ఘనము
1	1	6	216
2	8	7	343
3	27	8	512
4	64	9	729
5	125	10	1000

[illegible]

[illegible]

(1) [illegible]

[illegible]

[illegible]

(10) [illegible]

(11) [illegible]

[illegible] — 1953125 [illegible]

```
1953125 ( 125
1
3 ) 9 ( 2
    8
    35
    12
    236
     8
432 ) 2351 ( 5
    2160
     312
     300
     125
     125
     ...
```

[illegible] [46 [illegible]] [illegible] 1 [illegible] 3 [illegible] 8 [illegible] 12 [illegible] 432 [illegible]

[illegible] 12 [illegible] 3 [illegible]

[illegible] :—

[illegible] (40 [illegible]) [illegible] (40 [illegible] 41 [illegible]) [illegible]

48. [illegible]

(1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible] 3 [illegible] 100 [illegible]

(5) [illegible] 3 [illegible]

(6) [illegible]

(7) [illegible]

(8) [illegible]

(9) [illegible]

(10) [illegible]

(11) [illegible] 100 [illegible]

(12) [illegible]

(13) [illegible] 100 [illegible]

(14) [illegible]

(1) [illegible] — $\sqrt[3]{1953125}$?

1953125 (125 [illegible]

1

[illegible]	అపూర్ణభాజకము 300	953 (2
32	శేషము 64	
4	పూర్ణభాజకము 364	728
325	లబ్ధవర్గము 4	225125 (5
	అపూర్ణభాజకము 43200	
	శేషము 1825	
	పూర్ణభాజకము 45025	225125

(12 (8) [illegible]

(2) [illegible] — [illegible] [illegible]

819552855133368 (93582

729

	అపూర్ణభాజకము 24300	90553 (3
[illegible]	శేషము 819	
273	పూర్ణభాజకము 25119	75357
5	లబ్ధవర్గము 9	
2795	అపూర్ణభాజకము 2594700	15195855 (5
10	శేషము 13975	
28058	పూర్ణభాజకము 2608675	
18	లబ్ధవర్గము 25	13043375
280742	అపూర్ణభాజకము 262267500	2152480133 (8
	శేషము 224464	
	పూర్ణభాజకము 262491964	
	లబ్ధవర్గము 64	2099935712
	అపూర్ణభాజకము 26271649200	52544421368 (2
	శేషము 561484	
	పూర్ణభాజకము 26272210684	
		52544421368

Scanned by CamScanner

[illegible] 729 [illegible] 195112 [illegible] 81 [illegible] 243 [illegible] 100 [illegible] 24300 [illegible] 9 [illegible] 27 [illegible] 273 [illegible] 25119 [illegible] 100 [illegible]

[illegible] (49) [illegible]

[illegible]

$\sqrt[3]{729} = 9$ (2) $\sqrt[3]{19683} = 27$ (3) $\sqrt[3]{1953125} = 125$

60. ప్ర. అభీష్టఘాతమూలము చేయుపద్ధతి.

[illegible]

[illegible] 144 [illegible]

[illegible] 1 [illegible]

ఉదా: — 8 కి 11 ఘాతము 8^{11} ఎంతయగును ?

1 వ	ఘాతమాపకము	11,	×	8589934592
2 వ	,,	10,	వ,	1073741824
3 వ	,,	5,	×	32768
4 వ	,,	4,	వ,	4096
5 వ	,,	3,	వ,	64
6 వ	,,	1,	×	8
7 వ	,,	0,	వ,	1

$\therefore 8^{11} = 8589934592$

దీనికియుక్తి:—ఏసంఖ్యకైనను పూర్ణమాపకము 9 యగునో ఫలము (28 ప్ర 5 ని) చే 1 చేరదే శాగలదు. కావున 1 చే భాగింపబడును. ఇది 8 చే గుణింపబడును. కావున ఇది 8 యొక్క ఏకపూర్ణము, పిమ్మట విభజింపబడును. పిదప నిది వర్గింపబడును (28 ప్ర 5 ని) చే ఇది 8 యొక్క చతుర్థాంశ మగుచున్నది. దీనిని 8 చే గుణించ నిది 8 యొక్క షంతపూర్ణ మగుచున్నది. దీనివర్గము 8 యొక్క దశపూర్ణము. దానిని 8 చే గుణింప 8 యొక్క 11 పూర్ణమగు చున్నది. ఇట్లు మూలసంఖ్యకు అభీష్టపూర్ణ మగుచున్నది.

ప్రశ్నానుబంధము.

51. ప్ర. ఇంతవరకు ఈప్రకరణమునందు అభిన్నసంఖ్యలయొక్క సంకలనము వ్యవకలనము గుణనము భాగహారము వర్గము వర్గమూలము ఘనము ఘనమూలము అను 8 గణితములయొక్కయు వస్తుతులు చూపబడినవి. వీనికి అభిన్నపరికర్మాష్టక మనిపేరు. అభీష్టములగు సంఖ్యలయొక్క యోగము అంతరము మొదలగు ఫలములుబట్టి అభీష్టసంఖ్యల నెట్లు కనుగొనవలెనో తెలియు పద్ధతి వ్యస్తవిధి యనబడును.

విశ్లేషణ:—అభీష్టసంఖ్యతోను రెండవసంఖ్యను కలుపగావచ్చిన యోగము నుండి రెండవసంఖ్యను వ్యవకలించినచో అభీష్టసంఖ్య రాగలదు.

ఇట్లు అభీష్టసంఖ్యనుండి రెండవసంఖ్యను వ్యవకలించగా అంతరము రెండవసంఖ్యతో కలుపగా అభీష్టసంఖ్య అగును.

అభీష్టసంఖ్యను రెండవసంఖ్యచే గుణింపగా వచ్చు గుణనఫలమును రెండవ సంఖ్యచే భాగింప అభీష్టసంఖ్య అగును.

అభీష్టసంఖ్యను రెండవసంఖ్యచే భాగింపగా వచ్చు లబ్ధమును రెండవసంఖ్యచే గుణింప అభీష్టసంఖ్య అగును.

అభీష్టసంఖ్యయొక్క వర్గమును మూలగించినచో అభీష్టసంఖ్య అగును.

అభీష్టసంఖ్యయొక్క మూలమును వర్గించినచో అభీష్టసంఖ్య అగును.

ఇష్టసంఖ్యాఘనమునకు ఘనమూలము ఇష్టసంఖ్య అగును.

ఇష్టసంఖ్యాఘనమూలమునకు ఘనము ఇష్టసంఖ్య అగును.

ఈవిధముగా నిష్టసంఖ్యయందు సంకలనాదికమును చేయుటచే నేరాశి యగునో యారాశియందు సంకలనమునకు వ్యవకలనము వ్యవకలనమునకు సంకలనము గుణనమునకు భాగనము భాగనమునకు గుణనము వర్గమునకు వర్గమూలము వర్గమూలమునకు వర్గము ఘనమునకు ఘనమూలము ఘనమూలమునకు ఘనము ఇట్లు ప్రతిలోమముగా క్రియ చేయుటచే నిష్టసంఖ్య యేర్పడుచున్నది. ఇది వ్యస్తవిధి (ఈవ్యస్తవిధి వ్యస్తవిధిప్రకరణమున చూడదగును. 5 పరిశిష్టము చూ)

ఇట క్రిందివి చూపబడుచున్నవి.

(1) ఏసంఖ్యయందు 17 ను కలిపిన 35 అగును? పైయుక్తిని బట్టి $35 - 17 = 18$ ఇష్టసంఖ్య

(2) ఏసంఖ్యలోనుండి 25 ను వ్యవకలించిన 38 శేషమగును? $38 + 25 = 63$ ఇష్టసంఖ్య

(3) ఏసంఖ్యను 12 చే గుణించ 192 అగును? $192 \div 12 = 16$ ఇష్టసంఖ్య

(4) ఏసంఖ్యను 16 చే భాగించ 22 అగును? $22 \times 16 = 352$ ఇష్టసంఖ్య

(5) ఏసంఖ్యయొక్క వర్గము 4489 అగును? $\sqrt{4489} = 67$ ఇష్టసంఖ్య

(6) ఏసంఖ్యయొక్క వర్గమూలము 25 అగును? $25^2 = 625$ ఇష్టసంఖ్య

(7) ఏసంఖ్యయొక్క ఘనము 2197 అగును? $\sqrt[3]{2197} = 13$ ఇష్టసంఖ్య

(8) ఏసంఖ్యయొక్క ఘనమూలము 23 అగును? $23^3 = 12167$ ఇష్టసంఖ్య

(9) ఒకానొకసంఖ్యను 3 చే గుణించి దానిని వర్గించి అందు 58 వ్యవకలించి దానిని ఘనీకరించి దానిని 9 చే భాగించి అందు 8 ను కలిపి దానియొక్క ఘనమూలమున 1 చేర్చి కలిపి వర్గమూలము గణించిన 2 అగుచున్నది. ఆ ఒకానొక సంఖ్య యెయ్యది?

పైయుక్తినిబట్టి విలోమముగ చేయవలయును.

$\sqrt{(2^2-1)^3 - 8 \times 9} + 58 = 64$ దీనియొక్క వర్గమూలము 8 ను 2 చే భాగింప 4 ఇష్టసంఖ్య

వర్గప్రశ్నములు.

(1) [illegible]? (2) 8060708? (3) 23470²? (4) 9000288?

వర్గమును సంబంధించిన ప్రశ్నములు.

(1) [illegible]

(2) 18 [illegible] 18 [illegible] 1 [illegible] 1 [illegible]?

(3) [illegible] 30307 [illegible]?

(4) [illegible]?

[illegible] ప్రశ్నములు.

(1) [illegible] 1 [illegible] 1 [illegible] 288 [illegible]?

(2) [illegible] 1 [illegible] 1 [illegible] 1 [illegible]?

(3) [illegible] 1.0.0 [illegible]?

(4) [illegible]?

ఘనప్రశ్నలు.

(1) 303³

(2) 3437³?

(3) 80700³?

(4) 50000³?

ఘనమును సంబంధించిన ప్రశ్నలు.

(1) [illegible] 8 [illegible] 8 [illegible] 8 [illegible] 1 [illegible] 19 [illegible]?

(2) 1 [illegible] 1 [illegible] 1 [illegible] 0.1.8 [illegible] 24 [illegible]?

[illegible] ప్రశ్నములు.

(1) [illegible] 729 [illegible]?

(2) [illegible] 15625 [illegible]?

[illegible]

[illegible]

52. వ్రి. అపవర్తనమునకు సంబంధించిన పారిభాషికపదముల నిర్వచనము.

(1) రెండుసంఖ్యలలో పెద్దసంఖ్య చిన్నసంఖ్యచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడుచో పెద్దసంఖ్యకు చిన్నసంఖ్య అపవర్తనమని చెప్పబడును. ఆచిన్నసంఖ్యకు పెద్దసంఖ్య అపవర్త్యమని చెప్పబడును. (అపవర్తనము = భాగించునది. అపవర్త్యము = భాగింపబడునది. అపవర్తకశబ్దమునకు భాగించుటయని అర్థము)

కాని ప్రతిసంఖ్యయును 1 చేతనే నిశ్శేషముగ భాగింపబడును గాన 1 ని అపవర్తనాంకముగ్గా తీసికొనరాదు. దీని తక్కినసంఖ్యలకే గలదు.

(2) అట్లు 1 చే కంటెను తనకంటెను ఇతరములగుసంఖ్యచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడనిసంఖ్య ప్రథమసంఖ్యయని చెప్పబడును.

ఉదా:— 3, 7, 11 మొదలగుసంఖ్యలు తమచేగాని, 1 చేతగాని భాగింపబడును. ఇతరసంఖ్యచే భాగింపబడవు. కావున 3 ను 7 ను 11 ను ప్రథమసంఖ్యలని చెప్పబడును.

(3) ఒకసంఖ్య అనేకసంఖ్యలచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడునెడల ఆ అనేకసంఖ్యలన్నియును అపవర్తనములని చెప్పబడును. అందు పెద్దసంఖ్య మహత్తమాపవర్తనము. సామాన్యముగ మహత్తమము. రెండుసంఖ్యలు ఒక్కటే గనుక గలిగియున్నవి. ఏరెండుసంఖ్యలకు లేక అనేకసంఖ్యలకు 1 తప్ప ఇతరములగు సామాన్యాపవర్తనము లేనిచో ఆసంఖ్యలు పరస్పరము ప్రథమములని చెప్పబడును (అపవర్తన మహత్తమాపవర్తనములు 21 వ్రి. చూ.)

53. వ్రి. అపవర్తనమునకు సంబంధించిన సిద్ధాంతములు.

(1) రెండుసంఖ్యలలో 1 వ సంఖ్య 2 వ సంఖ్యచే నపవర్తింపబడునేని మొదటిసంఖ్యచే నపవర్తింపబడుసంఖ్యయును ఆ 2 వ సంఖ్యచే నపవర్తింపబడును.

ఉదా:— 8 అనుసంఖ్య 4 చే నపవర్తింపబడును. 8 × 9 = 72 కావున 72 నకు 8 అపవర్తనాంకము. ఈకారణముచే 72 నకును 4 అపవర్తనాంకమై యున్నది.

నిదర్శనము:— 8 = 4 × 2 ∴ 72 = 9 × 8 = 9 × 4 × 2 కావున 72 అది 4 చే నపవర్తింపబడును. (16 వ్రి. చూ)

(2) ఒకసంఖ్య రెండవ సంఖ్యచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడును. లబ్ధము ఆ రెండవదికాక వేరొకసంఖ్యచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడును. అప్పుడు ఆ రెండవసంఖ్యయొక్కయు ఆ రెండవలబ్ధముయొక్కయు గుణకఫలముచే మొదటిసంఖ్య నిశ్శేషముగ భాగింపబడును.

ఉదా:— 72 ÷ 9 = 8 లబ్ధము 8 ÷ 4 = 2 లబ్ధము

కావున 72 ÷ (9 × 2) = 4 అగుచున్నది. ఎందువలననగా:—

72 = 9 × 8 అగుచున్నది 8 = 4 × 2 అగుచున్నది. కావున (16 వ్రి చే) 72 = 9 × 4 × 2 గనుక 72 అది 9 × 2 చేత భాగింపబడుననది స్పష్టము అగుచున్నది. 9 రెండవసంఖ్య 2 రెండవలబ్ధము. 9 × 2 రెండవసంఖ్యయొక్కయు రెండవలబ్ధముయొక్కయు గుణితము.

(3) రెండుసంఖ్యలు 3 వ సంఖ్యచే నిశ్శేషములగునేని ఆ రెండుసంఖ్యలయొక్కయు మొత్తము అంతరమున్ను ఆ మూడవసంఖ్యచే నిశ్శేషములగును.

ఉదా:— 16 న్ను 44 న్ను 4 చే నిశ్శేషములగును. కావున 44 + 16 = 60 అది 4 చే నిశ్శేషమగును. 44 − 16 = 28 అదియును 4 చే నిశ్శేషమగును.

నిదర్శనము:— 16 = 4 × 4 అట్లు 44 = 4 × 11 గనుక 44 + 16 = 4 × 4 + 4 × 11 = (11 + 4) × 4 అట్లు 44 − 16 = 4 × 11 − 4 × 4 = (11 − 4) × 4

అందు (11 + 4) × 4 అదియును (11 − 4) × 4 అదియును 4 చే నిశ్శేషములగుట స్పష్టమైయున్నది.

54. వ్రి. రెండుసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనము కనుగొనుటకు పద్ధతి.

ఏ రెండుసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనము కావలయునో ఆసంఖ్యలలో చిన్నసంఖ్యచే పెద్దసంఖ్యను భాగించి ఆ శేషముచే పూర్వభాజకమును భాగింపవలెను. ఇట్లు వరుసగా వచ్చినశేషముచే పూర్వభాజకమును భాగింపవలెను. శేషము 0 యగు

వరకును భాగింపవలెను. చివరనైన భాజకము ఇష్టసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనము అగును. ఆమహత్తమాపవర్తనముచే నపవర్తింపబడిన ఇష్టసంఖ్యలు పరస్పరము దృఢము లగుచున్నవి.

(1) ఉదా:—(1) 624 (2) 1443 వీటికి మహత్తమాపవర్తనమెంత ?

```
624 ) 1443 ( 2
      1248
      ----
       195 ) 624 ( 3
             585
             ---
              39 ) 195 ( 5
                   195
                   ---
                   ...
```

ఇట్లు పరస్పరము భాగింపగా చివరనైన భాజకము (లేక శేషము) 39 పైరెండు సంఖ్యలకును మహత్తమాపవర్తనము అగుచున్నది. ఎట్లన 39 చే పైరెండుసంఖ్యలను భాగింప శేషము శేషింపదు. ఆలబ్ధములు పరస్పరము దృఢము లగును. అట్లుగా 39 కంటె పెద్దసంఖ్యచేతను భాగింపబడవు.

624 ÷ 39 = 16 మరియు 1443 ÷ 39 = 37 ఇవియు 16 ను 37 ను పరస్పరము దృఢము లగుచున్నవి.

ఉపపత్తి:—పై ఉదాహరణమునందు చివరిభాజకము 39. చివరిభాజ్యము 195 ఈరెండిటికిని 39 కంటె మహత్తమాపవర్తన ముండదుగదా !

కనుక 195 × 3 = 585 ఇదియును 39చే నిశ్శేషముగును. (53 ప్ర 1వ చూ)

కనుకనే 585 + 39 = 624 ఇదియును 39చే ,, (53 ప్ర 3వ చూ)

ఇట్లు 624 × 2 = 1248 ఇదియును 39 చే ,, (53 ప్ర 1వ)

ఇట్లు 1248 + 195 = 1443 ఇదియును 39 చే ,, (53 ప్ర 3వ)

దీనివలన 39 చే అభీష్టములగు పైరెండుసంఖ్యలను నిశ్శేషముగునని స్పష్టమగుచున్నది.

మరియొక ప్రకారముగ ఉపపత్తి:—

ఏసంఖ్య (1) 624 (2) 1443 వీటిని నిశ్శేషముగ భాగించునో ఆసంఖ్య 624 × 2 = 1248 దీనినిన్ని నిశ్శేషముగ భాగించును. (53 ప్ర 1 వ) ఇట్లు 1443 — 1248 = 195 దీనినిన్ని నిశ్శేషము చేయును. (57 ప్ర 3 వ) అట్లాగే ఆసంఖ్య 195 × 3 = 585 దీనిని నిశ్శేషముచేయును. (53 ప్ర 1 వ)

624 — 585 = 39 దీనినిన్ని నిశ్శేషము చేయును (53 ప్ర 1 వ) దీనింబట్టి ఏసంఖ్య 624 మరియు 1443 నున్ను నిశ్శేషముగ భాగించునో ఆసంఖ్య వాటిని పరస్పరము భాగించుటచే చివరను శేషముగనున్న 39 నిన్ని నిశ్శేషముగ భాగించును అని తెలియుచున్నది.

పైఉపపత్తులనుబట్టియే చివరకు శేషించిన 39 యే మహత్తమాపవర్తనమనియును దానికంటె పెద్దసంఖ్య ఆరెండిటినపవర్తింపదని తేటయగుట స్పష్టమగుచున్నది.

దీనింబట్టి ఈయనుమానములు సిద్ధించుచున్నవి.

(1) రెండుసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనమగుసంఖ్య ఆరెండిటిని పరస్పరము భాగించుటచే నగు ప్రతిభాగహారమందున్న భాజ్యభాజకములకును నపవర్తనమగును.

(2) రెండుసంఖ్యలను నిశ్శేషముగ భాగించుసంఖ్య ఆరెండుసంఖ్యలయొక్కయు మహత్తమాపవర్తనమునున్ను నిశ్శేషముగ భాగించును.

(3) పరస్పరము దృఢములగు రెండుసంఖ్యలను పరస్పరము భాగించుటచే చివరకు 1 శేషించును.

55. ప్ర. మహత్తమాపవర్తనము తెలియగలుగు సులభపద్ధతి.

ఏరెండుసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనము కావలయునో ఆరెండిటిని 46 వ (24 ప్ర) సామాన్యముగ గణించినయటువలె సాధారణాపవర్తనములచే నపవర్తించి అట్లు సాధారణాపవర్తితసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనమును కనుగొనవలెను. అట్టి మహత్తమాపవర్తనముయొక్కయు సాధారణాపవర్తనాంకములయొక్కయు గుణనము, మొదటి రెండుసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనాంకము అగును.

ఉదా:—(1) 11132 (2) 15180 వీటికి మహత్తమాపవర్తనము ?

```
 4 | 11132        4 | 15180
   |------          |------
11 |  2783       11 |  3795
   |------          |------
       253              345
```

వీటిని 11 చే భాగింప

ఇప్పుడు 253 నకును 345 నకును పరస్పరము భాగించుటచే 23 మహత్తమా పవర్తనము వచ్చుచున్నది. కావున 4 × 11 × 23 = 1012 ఇది మొదటిసంఖ్య లకు మహత్తమాపవర్తనము.

యుక్తి:—అపవర్తకమగు సంఖ్యలయొక్క మహత్తమాపవర్తనము అనేకసంఖ్య లకు [illegible] అపవర్తనాంకము లగు అనేకసంఖ్యలయొక్క మహత్తమా పవర్తనము గుణించుటచే ఇష్టసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తన మగుచున్నది.

(2) అభీష్టసంఖ్యలను రెండింటిలో [illegible] పూర్వోక్త ప్రకారము అపవర్తనాంకముచే నిశ్శేషముగా [illegible] సంఖ్యకును రెండవసంఖ్యకును అగు మహత్తమాపవర్తనాంకము అభీష్టము లగు సంఖ్యలకును అపవర్తనాంక మగుచున్నది. కావున [illegible] అభీష్టసంఖ్యలకు [illegible] తెలియును.

ఉదా:—4599 కిని 1710 కిని మహత్తమాపవర్తన మెంత?

ఇందు 1710 కిని 10 అపవర్తనాంకము. ఈసంఖ్య 4599 నిశ్శేషముగ [illegible] కావున 4599 కిని 171 కిని మహత్తమాపవర్తనము కనుగొన వలయును.

```
171 ) 4599 ( 26
      4446
      ----
       153 ) 171 ( 1
             153
             ---
              18 ) 153 ( 8
                   144
                   ---
                     9 ) 18 ( 2
                         18
                         --
                         ..
```

ఇచట 9 మహత్తమాపవర్తన మగుచున్నది. ఇదియే అభీష్టసంఖ్యలకును మహత్తమాపవర్తనము.

56. ప్ర. రెండికంటె నెక్కువలగు సంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనము [illegible] రెండుసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనము [illegible]

పవర్తనాంకముకును 3 వ సంఖ్యకును మహత్తమాపవర్తనము గనుగొనుము. ఇట్లు అభీష్టసంఖ్యలన్నియు ముగియువఱకును పూర్వపు మహత్తమాపవర్తనమున కును మఱియొక సంఖ్యకును గనుగొనుట క్రియను చేయుము. తుదనైన మహత్త మాపవర్తనము అభీష్టసంఖ్యలకన్నిటికిని మహత్తమాపవర్తనమగును.

ఉదా:—45, 54, 60 వీటికి మహత్తమాపవర్తన మెంత?

```
45 ) 54 ( 1
     45
     --
      9 ) 45 ( 5
          45
```

తొలుత 45 కును 54 కును మహత్తమాపవర్తన మును గనుగొనగా 9 అగుచున్నది. కావున

```
9 ) 60 ( 6
    54
    --
     6 ) 9 ( 1
         6
         -
         3 ) 6 ( 2
             6
             -
```

ఇప్పుడు పూర్వమహత్తమాపవర్తనమగు 9 కిని 60 కిని గనుగొనగా 3 మహత్తమాపవర్తన మగు చున్నది. కావున 3 ఈసంఖ్య మూడుసంఖ్యల కును మహత్తమాపవర్తన మగును. (54 [illegible] 58 [illegible] 1 [illegible])

57. ప్ర. అభీష్టములగు రెండుసంఖ్యలను ఒకయంకచే భాగించుటచే అభీష్ట శేషములు రావలెను. అట్టి పక్షమందు అభీష్టశేషములను అభీష్టసంఖ్యల నుండి తీసివేయగా మిగిలిన సంఖ్యలకు పూర్వప్రకారము అపవర్తనాంకమును గను గొనుము. ఆసంఖ్యచే అభీష్టసంఖ్యలను భాగించిన అభీష్ట శేషములే వచ్చును.

ఉదా:—48, 55 ఈసంఖ్యలను క్రమముగ 3, 1 శేషము వచ్చునట్లు భాగించు నెట్టిసంఖ్య చెప్పుము?

ఇందు క్రమముగ ఈసంఖ్యలనుండి ఈశేషములను తీసివేయుము.

48 — 3 = 45 , 55 — 1 = 54 ఇప్పుడు (1) 45 (2) 54 లకు మహత్తమాపవర్తనము 9 అగుచున్నది. ఈసంఖ్యచే ఉద్దిష్టసంఖ్యలను భాగించిన అభీష్టములగు శేషములు వచ్చును.

ప్రశ్నలు.

ఈసంఖ్యలకు మహాత్తమాపవర్తనములను కనుగొనుము.

(1) 728, 456 (4) 252, 398, 694

(2) 843, 1243 (5) 2211, 4901, 7103

(3) 176, 1100, 444 (6) 165, 231, 385

(7) 4284, 42877 [illegible] ?

(8) 72498, 946720 [illegible] ?

(9) [illegible] ?

లఘుతమాపవర్తనము.

58. [illegible] (53 ప్రశ్న 1) [illegible]

[illegible] 2, 3, 4, 6 [illegible] 12, 24, 36 [illegible] 12 [illegible]

59. [illegible] 1 [illegible]

[illegible] (53 ప్ర 2 కి చే) [illegible]

60. [illegible]

[illegible] (1) 8 (2) 18 [illegible]

[illegible] (59 ప్రశ్న చే) [illegible]

61. [illegible]

[illegible]

[illegible] 156 [illegible]

[illegible] 12 [illegible]

∴ 156 × 98 ÷ 12 = 14378 ÷ 12 = 2158 [illegible]

[illegible] 98 [illegible] 156 [illegible] 12 [illegible] 8 [illegible] 13 [illegible] (60 ప్రశ్న చే) 8 × 13 = 104 [illegible]

[illegible] 8×12 [illegible] 12 [illegible]

[illegible] $12 \times 8 \times 12$ [illegible]
([illegible] 72 [illegible])

[illegible] $8 \times 13 \times 12$ [illegible] 12 [illegible] 12 [illegible] (7 [illegible] 7 [illegible])

$\therefore 8 \times 13 \times 12 = 8 \times 13 \times 12 \times 13 \div 13 = 8 \times 12 \times 13 \times 12 \div 12$

$= 96 \times 156 \div 12$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

62. [illegible] 2 [illegible]

[illegible] — 6, 20, 25 [illegible] ?

[illegible] 6 [illegible] 20 [illegible] 2 [illegible]
$6 \times 20 \div 2 = 60$ [illegible] 6 [illegible] 20 [illegible] (61 [illegible])

[illegible] 60 [illegible] 25 [illegible] 5 [illegible]
$60 \times 25 \div 5 = 1500 \div 5 = 300$ [illegible] 60 [illegible] 25 [illegible]

63. [illegible]

[illegible] — 4, 7, 9 [illegible] 4, 7 [illegible] 4, 9 [illegible] 9, 7 [illegible] $4 \times 7 \times 9 =$
252 [illegible]

[illegible] — (63 [illegible]) [illegible] 4, 7 [illegible] 4×7 [illegible]

[illegible] 4×7 [illegible] 9 [illegible]
$4 \times 7 \times 9$ [illegible]

64. [illegible]

[illegible] — 6, 20, 25 [illegible] ?

[illegible] 6, 25 [illegible] 6, 20 [illegible] 20, 25 [illegible] 6, 20 [illegible] 2 [illegible] 3, 10 [illegible] 10, 25 [illegible] 5 [illegible] 2, 5 [illegible] $3 \times 2 \times 5$ [illegible] 2, 5 [illegible] $(3 \times 2 \times 5) \times (2 \times 5) = 300$ [illegible]

[illegible] (63 [illegible]) [illegible]

65. [illegible]

[illegible]

Scanned by CamScanner

[illegible]

[illegible]

(1) ఉదా:— 12, 15, 16, 18 వీటికి లఘుతమాపవర్త్యము ?

2	12, 15, 16, 18
2	6, 15, 8, 9
3	3, 15, 4, 9
	5, 4, 3

కాన $5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 720$ [illegible]

2 ఉదా:— 2 మొదలు 10 వరకు గల సంఖ్యలకు లఘుతమాపవర్త్యమెంత ?

2	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
	3, 7, 4, 9, 5

కనుక $7 \times 4 \times 9 \times 5 \times 2 = 2520$ [illegible]

లఘుతమాపవర్త్య ప్రశ్నములు.

[illegible]

(1) 9, 20, 12, 55, 33
(2) 6, 11, 14, 18, 22
(3) 13, 24, 40, 58, 72
(4) 120, 144, 160, 804, 134
(5) 30, 42, 70, 110
(6) 84, 91, 15, 24

లఘుతమాపవర్త్య సంబంధప్రశ్నములు.

(1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

[illegible]

భిన్నపరికర్మాష్టకము.

2 వ పరిచ్ఛేదము.

భిన్నసంఖ్యాస్వరూపోత్పాదనము.

---

55. [illegible]

గణితము చెప్పబడినది. ఈగణితమునందు సంకలన వ్యవకలన గుణనములందు ఫలము అభిన్నముగానే వచ్చుచున్నది.

భాగహారమునందుమాత్రము ఎప్పుడు భాజకముచే భాజ్యము నిశ్శేషముగ భాగింపబడునో అప్పుడు లబ్ధము అభిన్నము (పూర్ణము)గనే రావలయు. కాని ఎప్పుడుభాజకముచే భాజ్యము నిశ్శేషముగ భాగింపబడదో అప్పుడు లబ్ధము భిన్నసంఖ్య (అపూర్ణసంఖ్య = భిన్నభాగములుగలసంఖ్య)గ వచ్చుచున్నది.

ఎట్లనగా రూ 61 లను 8 మనుష్యులకు పంచవలయును ఇది భాగహారప్రశ్నము. ఇప్పుడు 8 చే 61 ని భాగింపగా 7 లబ్ధము వచ్చుచున్నది. శేషము 5 ఉన్నది. కావున రూ 5 లను 8 చే సమానముగా [illegible] లబ్ధమున్న రూ 7 లున్న ఒక్కొక్కనికి [illegible]. అని చెప్పవలయును. ఇట్టిభిన్నసంఖ్యలను సంబంధించిన గణితము భిన్నగణితము.

ఈ భిన్నసంఖ్యలందు భాజ్యమును పైనుంచి క్రిందుగీతగీచి దాని క్రింద భాజకము వ్రాయుచున్నారు. గీతకు పైసంఖ్య అంశము లేక లవము అనిచెప్పబడును. క్రిందిసంఖ్య హారము లేక ఛేదము అనియు చెప్పబడును.

ఉదా:— $\frac{5}{8}$ ఇది 5 లో 8 వ వంతు అని బోధించుచున్నది.

ఇట్లుగనే $\frac{61}{8}$ అనియు వ్రాయవచ్చును. ఇప్పుడు 61 లో 8 వ వంతు అని గ్రహింపవలయును. 61 లో 8 వ వంతు అనగా 7 న్ను 5 లో 8 వ వంతు న్ను అనగా సమానమే కావున $\frac{61}{8} = 7 + \frac{5}{8}$ అగుచున్నది. దీనిబట్టి హారము కంటె అంశము ఒకప్పుడు హెచ్చుగను ఒకప్పుడు తక్కువగను నుండవచ్చునని తెలియుచున్నది. కాని ఎప్పుడు హారాంశములు రెండును సమానములగుచున్నవో అప్పుడు లబ్ధము 1 కి సమమగుచున్నదియని గ్రహింపవలయును.

67. ప్ర. ఈ $\frac{5}{8}$ భిన్నసంఖ్యయందు రూపమొక్కటిని 8 భాగములుగ విభజించి ఒకభాగము అను తాత్పర్యము [illegible] స్పష్టమగుచున్నది. కాని ఈభిన్నసంఖ్యకు ఒకవస్తువును 8 భాగములుచేసి అందు 5 భాగములు అనియు తాత్పర్యము గ్రహింపవచ్చును. ఎట్లనగా ఉభయార్థము సమానమే యగుచున్నది.

ఎట్లనగా:— $\frac{5}{8}$ ఈభిన్నసంఖ్యయందు 5 రూపాయలను 8 మనుష్యులకు పంచిపెట్టవలయును అనుకొనుము. అప్పుడు 5 రూపాయలను అణాలుగమార్చినచో $5 \times 16 = 80$ అణాలు అగుచున్నవి. ఈసంఖ్యను 8 చే భాగింప ఒక్కొక్కనికి అణాలు 10 వచ్చును.

లేక రూ 1 ని 8 చే భాగించి 5 భాగములు గ్రహించినను అణాలు 10 గనే యగుచున్నవి. ఇట్లుగనే $\frac{61}{8}$ ఈసంఖ్యయందును ఒకరూపాయను 8 సమభాగములుగ విభజించిన అందులో అట్టిభాగములు 61 అనినను రూ 61 లను 8 చే భాగింపవలెనను తాత్పర్యము సమానమే యగుచున్నది.

68. ప్ర. భిన్నసంఖ్యలయొక్క సంజ్ఞాభేదములు.

(1) భిన్నసంఖ్యయందు హారముకంటె అంశము తక్కువయగునో దానిభిన్నసంఖ్య సామాన్యభిన్నమని చెప్పబడును.

(2) హారముకంటె అంశము హెచ్చుయగునో స్థూలభిన్నమని చెప్పబడును.

(3) మిశ్రభిన్నసంఖ్యయందు పైసంఖ్య అంశములను [illegible] భాగములచే [illegible]. కావున [illegible] మిశ్రభిన్నసంఖ్యను భాగజాతియని చెప్పవచ్చును. [illegible] ఉదా:— $\frac{?}{?}$, $\frac{?}{?}$, $\frac{?}{?}$ ఇత్యాది... [illegible] భిన్నసంఖ్యలను [illegible] చెప్పబడును.

(4) భాగములో భాగమును సూచించు భిన్నసంఖ్య మిశ్రభాగజాతి

ఉదా:— $\frac{?}{?}$ లో $\frac{?}{?}$ లో $\frac{?}{?}$ ఇత్యాది

(5) [illegible] భాగాను [illegible] భిన్నసంఖ్యలు [illegible] స్థూలభిన్నమని చెప్పబడును.

(6) [illegible]

[illegible]

(7) [illegible]

(8) [illegible]

(9) [illegible]

70. ప్ర. [illegible]

[illegible]

[illegible] (34, 58, 54, 55, 56 ప్ర) [illegible]

ఉదా:— $\frac{156}{228}$, [illegible]

$$\frac{156}{228} = \frac{39}{57} = \frac{13}{19}$$ [illegible]

[illegible] $\frac{156}{228}$ [illegible] $\frac{39}{57}$ [illegible] $\frac{13}{19}$ [illegible] (24 ప్ర—53 ప్ర చూ).

71. ప్ర. పూర్ణసంఖ్యను అభీష్టసంఖ్యహారకముగాగల భిన్నసంఖ్యగా మార్చుట.

[illegible] 1 [illegible]

[illegible]

లేక పూర్ణసంఖ్యను ఇష్టసంఖ్యచే గుణించి ఆగుణనఫలమునకు ఇష్టసంఖ్యను హారముగ చేయుము.

ఒకసంఖ్యను ఇష్టసంఖ్యచే గుణించి ఇష్టసంఖ్యచే భాగించినను లబ్ధము ఆ మొదటిసంఖ్యయే యగుచున్నది గాన దీనివిలువయందు భేదము గలుగదు.

ఉదా:— 12 ను 5 హారముగగల భిన్నసంఖ్యగ మార్చుము.

$$12 = \frac{12}{1} \therefore \frac{12}{1} = \frac{12\times5}{1\times5} = \frac{60}{5}$$

$$\text{లేక } 12 = 12\times5\div5 = \frac{12\times5}{5} = \frac{60}{5}$$

భిన్నభాగజాతి.

ఆర్యాజాతి చతుష్టయము.

తత్రాదౌ వంశసవర్ణనమ్ తత్రాపి భాగజాతౌ కరణసూత్రం వృత్తమ్

అన్యోన్యహారాభిహతౌ హరాంశౌ రాశ్యోస్సమచ్ఛేదవిధానమేవమ్।
మిథోహరాభ్యామపవర్తితాభ్యాం యద్వా హరాంశౌ సుధియాత్ర
గుణ్యౌ॥ 31॥

టీ. హరాంశౌ = హారలవములు అన్యోన్యహారాభిహతౌ = భిన్నసంఖ్యల యొక్క హారములచే గుణింపబడినవియై (ఒక దానియొక్క హారముచే మరియొక దానియొక్క హారలవములు గుణింపబడెను) రాశ్యోః = రెండు రాసులకును సమచ్ఛేదవిధానమ్ = సమచ్ఛేదీకరణము ఏవం = ఈప్రకారముగ (వచ్చును) యద్వా = లేక సుధియా = బుద్ధిమంతునిచే అత్ర = ఈసమచ్ఛేదీకరణమునందు అపవర్తితాభ్యాం = అపవర్తనముచేసిన హారాభ్యాం = హారములచే మిథః = పరస్పరము హరాంశౌ = హారలవములు గుణ్యౌ = గుణింపదగినవి.

భాగజాతి లేక సమచ్ఛేదీకరణము.

72. ప్ర. తా. (1) రెండుభాగజాతి భిన్నసంఖ్యలను సమానహారములు గలవిగ చేయవలసినప్పుడు ఒకభిన్నసంఖ్యయొక్క హారముచే మరియొక భిన్నసంఖ్య యొక్క హారలవములను గుణింపుము మరియొక భిన్నసంఖ్యయొక్క హారముచే

మొదటిభిన్నసంఖ్యయొక్క హారలవములను గుణింపుము. అప్పుడు రెండుసంఖ్యలును సమానహారములు గలవి యగును.

భిన్నసంఖ్యలు అనేకములున్నచో సమానహారములను రెండుభిన్నసంఖ్యలయొక్కయు హారలవములను 3 వ భిన్నసంఖ్యయొక్క హారముచే గుణింపుము ఆరెండు భిన్నసంఖ్యలయొక్కయు హారముచే 3 వ భిన్నసంఖ్యయొక్క హారలవములను గుణింపుము. ఇట్లు అనుసరణము చేయవలెను. అన్నియును సమచ్ఛేదములగును.

లేక ఒక్కొక భిన్నసంఖ్యయొక్క లవమును తక్కినభిన్నసంఖ్యలయొక్క హారములచే గుణించి గుణింపగా గుణనఫలములను లవములుగను అన్నిటియొక్కయు హారములను గుణింపగా గుణనఫలము హారములుగను వ్రాయుము. సమచ్ఛేదము లగును.

(ఇట్లు గుణించుటలో గుణించుటకు పూర్వమునందలి హారములను ఉపయోగింపవలయును).

(1) ఉదా:— $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ వీటిని సమచ్ఛేదములుగ చేయుము.

$$\frac{1}{5} = \frac{1\times3}{5\times3} = \frac{3}{15} \text{ ఇట్లు } \frac{1}{3} = \frac{1\times5}{3\times5} = \frac{5}{15}$$

∴ $\frac{3}{15}$, $\frac{5}{15}$ ఇవి అభీష్టములగు సమచ్ఛేదములగు భిన్నసంఖ్యలు.

(2) ఉదా:— $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$ వీటిని సమచ్ఛేదములుగ చేయుము.

తొలుత $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{5}$ ఈ రెంటిని సమచ్ఛేదములుగ చేయవలయును. కావున పై ప్రకారము $\frac{3}{1} = \frac{3\times5}{1\times5} = \frac{15}{5}$ ఇట్లు $\frac{1}{5} = \frac{1\times1}{5\times1} = \frac{1}{5}$ ∴ $\frac{15}{5}$, $\frac{1}{5}$ సమ చేయుము.

పిదప $\frac{15}{5}$, $\frac{1}{5}$ ఈ సంఖ్యలను $\frac{2}{3}$ దానితో సమచ్ఛేదములుగ చేయవలయును.

$$\frac{15\times3}{5\times3}, \frac{1\times3}{5\times3} = \frac{45}{15}, \frac{3}{15} \text{ ఇట్లు } \frac{2}{3} = \frac{2\times5}{3\times5} = \frac{10}{15}$$

∴ $\frac{45}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{10}{15}$ సమచ్ఛేదములు లేక మొదటి భిన్నసంఖ్య లవమును ఇతర

హారములచే గుణింప మొదటిసంఖ్యయొక్క లవము అగుచున్నది. 3 × 5 × 3 = 45

ఇట్లు రెండవసంఖ్యయొక్క లవము ... 1 × 1 × 3 = 3

,, మూడవసంఖ్యయొక్క లవము ... 1 × 1 × 5 = 5

అన్నిహారములయొక్కయు గుణనము 1 × 5 × 3 = 15 అన్నిటికొక్కయు హారము ∴ $\frac{45}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{5}{15}$ ఇవి సమచ్ఛేదములు.

(2) భిన్నసంఖ్యల రెండింటి హారములకు మహత్తమాపవర్తనముచే భాగించవలెను. మొదటిభిన్నసంఖ్యయొక్క ఉభయములను రెండవభిన్నసంఖ్యయొక్క అపవర్తితహారముచే గుణింపవలెను. రెండవభిన్నసంఖ్యయొక్క ఉభయములను మొదటిభిన్నసంఖ్యయొక్క అపవర్తితహారముచే గుణింపవలెను. గుణింపబడిన హారములు సమానమై భిన్నసంఖ్యలు సమానహారములు గలవి యగును.

ఉదా:— $\frac{1}{63}$, $\frac{1}{14}$ వీటిని సమచ్ఛేదములుగా చేయుము.

63, 14 ల యొక్క మహత్తమాపవర్తనము 7. దీనిచే రెండుభిన్నసంఖ్యల యొక్కయు హారములను 63, 14 లను అపవర్తింప 9, 2 వచ్చును. అపవర్తితహారము 9 చే రెండవ భిన్నసంఖ్య $\frac{1}{14}$ యొక్క ఉభయములను, రెండవ అపవర్తితహారము 2 చే మొదటిభిన్నసంఖ్య $\frac{1}{63}$ యొక్క ఉభయములను గుణింప

$\frac{1\times2}{63\times2} = \frac{2}{126}$ ఇట్లు $\frac{1\times9}{14\times9} = \frac{9}{126}$ ∴ $\frac{2}{126}$, $\frac{9}{126}$ ఇవి సమచ్ఛేదములు.

ఇచట అపవర్తితహారముచే పూర్వహారమును గుణించుటచే ఆ రెండుహారములకు లఘుతమాపవర్త్యము సిద్ధించుచున్నది. ఎట్లనగా 63, 14 సంఖ్యలకు రెంటికిని మహత్తమాపవర్తనము 7 అగుచున్నది. దీనిచే ఆసంఖ్యలను అపవర్తింపగా 9, 2 అగుచున్నవి. అనగా 63 ÷ 7 = 9 ఇట్లు 14 ÷ 7 = 2 కావున 63 = 9 × 7, 14 = 7 × 2 అగుచున్నవి. దీనివలన 63 × 2 = 9 × 2 × 7 ఇట్లు 14 × 9 = 7 × 2 × 9 కావున 126 ఈసంఖ్య 63, 14 ల లఘుతమాపవర్త్యమగుచున్నది. (61 వ పుట చూ) ఇట్లు ఇచట లఘుతమాపవర్త్యము కూడ సిద్ధించెను.

ఇట్లు రెండుసంఖ్యలయొక్కయు హారములయొక్క లఘుతమాపవర్త్యము హారముగా గ్రహించబడెను. రెండవసంఖ్యయొక్క అపవర్తితహారము అనగా మహత్తమాపవర్తనముచే పూర్వహారము భాగించబడినట్లు కాన దీని వలన గుణింపబడెను.

(3) ఇట్లు లఘుతమాపవర్త్యమును ఎరిగి సమచ్ఛేదములుగా చేయుట సులభమగును. భిన్నసంఖ్యలు ఎన్నియైనను ఉన్న క్రమమున అన్నిసంఖ్యలయొక్కయు హారములకు లఘుతమాపవర్త్యమును హారముగాను, ఆలఘుతమాపవర్త్యమును తమతమపూర్వహారములచే భాగించగా వచ్చిన లబ్ధములచే అంశములను గుణించగా గుణనఫలములు అంశములుగాను వ్రాయవలెను. అవి సమచ్ఛేదము లగును.

ఉదా:— $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ ఈసంఖ్యలను సమచ్ఛేదములుగా చేయుము.

మొదట హారములయొక్క లఘుతమాపవర్త్యముకొరకు న్యాసము.

2) 3, 4, 5, 6

3, 2, 5, 3 ∴ 2 × 2 × 5 × 3 = 60 లఘుతమాపవర్త్యము

పైపద్ధతి ననుసరించి 60 ÷ 3 = 20 ∴ 20 × 2 = 40 మొదటిసంఖ్యయొక్క అంశము

అట్లు 60 ÷ 4 = 15 ∴ 15 × 3 = 45 రెండవ ,,

60 ÷ 5 = 12 ∴ 12 × 4 = 48 మూడవ ,,

60 ÷ 6 = 10 ∴ 10 × 5 = 50 నాలవ ,,

∴ $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$ ఇవి సమచ్ఛేదములగు ఈ పైభిన్నసంఖ్యలు.

(4) ఇట్లు సమచ్ఛేదములుగా చేయుటవలన భిన్నసంఖ్యలయొక్క న్యూనాధిక భావము (తారతమ్యము) ఆ యా సంఖ్యలలో ఏ సంఖ్య పెద్దదియగు నదియు ఏ సంఖ్య చిన్నదియగు నదియు స్పష్టమగుచున్నది. ఎట్లనగా పైఉదాహరణమునందు

ఏ 1 యును 3 సమభాగములుచేసి అందలి 2 భాగములును

4 సమభాగములుచేసి అందలి 3 భాగములును

5 సమభాగములుచేసి అందలి 4 భాగములును

6 సమభాగములుచేసి అందలి 5 భాగములును

క్రమముగ పైభిన్నసంఖ్యలచే బోధింపబడుచున్నది యనుకొందము.

అందు ఏసంఖ్యకంటె ఏసంఖ్య పెద్దది అనునది యొకసారి నిర్ణయించుటకు కష్టము. సమచ్ఛేదములుగా చేసినయెడల పైభిన్నసంఖ్యలన్నియు 60 సమభాగములుగా చేసిన 1 యొక్కయు ఎన్నెన్ని భాగములైనదియు స్పష్టముగ తెలియుచున్నది. అందుచే న్యూనాధికభావము అతిసులభముగ గోచరించుచున్నది.

(5) సమచ్ఛేదములుగ చేయవలసిన సంఖ్యలు ఏ జాతివిగానున్నను ఆసంఖ్యలను భాగజాతివానిగను లఘూకరణముగాను మార్చి సమచ్ఛేదములుగ చేయవలయును. ఈపద్ధతి ముందు వివరింపబడును.

అత్రోద్దేశకః.

రూపత్రయం పంచలవ స్త్రిభాగో యోగార్థమేతాన్వద తుల్యహారాన్ ।
త్రిషష్టిభాగశ్చ చతుర్దశాంశః సమచ్ఛిదౌ మిత్ర వియోజనార్థం ॥ ౬ ॥

న్యాసః $\frac{౩}{౧}$, $\frac{౧}{౫}$, $\frac{౧}{౩}$ జాతా సమచ్ఛేదాః $\frac{౪౫}{౧౫}$, $\frac{౩}{౧౫}$, $\frac{౫}{౧౫}$ యోగేజాతం $\frac{౫౩}{౧౫}$ అథ ద్వితీయోదాహరణార్థం న్యాసః $\frac{౧}{౬౩}$, $\frac{౧}{౧౪}$ సప్తాపవర్తితాభ్యాం హారాభ్యాం ౯, ౨ సంగుణితౌ సమచ్ఛేదౌ $\frac{౨}{౧౨౬}$, $\frac{౯}{౧౨౬}$ వియోగేజాతం $\frac{౭}{౧౨౬}$

ఇతి భాగజాతిః.

తా॥ మిత్రుడా! ౩ రూపములు (౧ చే [illegible] రూపములు [illegible]) ౫వ వంతు ౩వ వంతు వీటిని సంకలనము చేయుటకు సమచ్ఛేదములుగ చెప్పుము.

63 వ వంతు 14 వ వంతు వీటిని వ్యవకలనము చేయుటకు సమచ్ఛేదములుగ చెప్పుము. అని సమచ్ఛేదీకరణము యొక్క ఉదాహరణము చెప్పబడెను.

(1) ఉదా:— $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ (2) ఉదా:— $\frac{1}{63}$, $\frac{1}{14}$

ఈ ఉదాహరణములు చేసి చూపబడినవి [illegible] చెప్పబడియున్నవి. [illegible] వియోగములను చేసి చూపియున్నారు.

ఉపపత్తి:— పూర్వోక్త (70, 71) సూత్రములచే [illegible] ఉపపత్తి స్పష్టముగనున్నది.

ప్రశ్నములు.

ఈక్రిందిసంఖ్యలందు ఒక్కొక్కపంక్తియందలి భిన్నాంశములను సమచ్ఛేదములుగజేసి అందు పెద్దభిన్న సంఖ్యలను ఏర్పరుచుము.

(1) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ (4) $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{7}$

(2) $\frac{13}{15}$, $\frac{23}{25}$ (5) $\frac{5}{2}$, $\frac{35}{7}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{113}{4}$

(3) $\frac{3}{16}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{31}{60}$ (6) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$ ఈ సంఖ్యలను 60 హారముగల సంఖ్యలుగ మార్చుము.

ప్రభాగజాతి.

అథ ప్రభాగజాతౌ కరణసూత్రం వృత్తార్ధమ్.

లవాలవఘ్నాశ్చ హరాహరఘ్నా భాగప్రభాగేషు సవర్ణనం స్యాత్.

టీ॥ లవాః = లవములు, లవఘ్నాః = లవములచే గుణింపబడినవియు, హరాః = హారములు, హారఘ్నాశ్చ = హారములచే గుణింపబడినవియును (అగును.) భాగప్రభాగేషు = భాగములలో భాగములు చేయవలసినప్పుడు, సవర్ణనం = సవర్ణనము, స్యాత్ = అగును.

73. ప్ర. భా. ప్రభాగజాతి భిన్నమందు అనగా భాగములలో భాగములుగల భిన్నసంఖ్యలను భాగజాతిసంఖ్యగా మార్చవలసినప్పుడు ఆప్రభాగజాతి భిన్నసంఖ్యలన్నిటియొక్కయు అంశములు గుణనఫలమును అంశముగను హారములు గుణనఫలమును హారముగను వ్రాసినచో భాగజాతి భిన్నసంఖ్య గాగలదు.

ఉదా:— $\frac{3}{4}$ లో $\frac{5}{6}$ దీనిని భాగజాతిగ మార్చుము. అనగా సవర్ణనము చేయుము.

పైపద్ధతి ననుసరించి $\frac{3}{4}$ లో $\frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{4 \times 6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$ ఇది భాగజాతి యొక్క లఘూకరణరూపము.

ఉపపత్తి:— $\frac{3}{4}$ లో $\frac{5}{6}$ దీనియొక్క అర్థమేమనగా 1 టి అనగా ఒక రూపాయి అనుకొనుడు. మా 1 యుడి 4 భాగములుచేసి అందు 3 భాగములను మొత్తము 6 భాగములుగా విభజించి అందు 5 భాగములు అని అగుచున్నది.

అకారణముచే $\frac{3}{4} \div 6 \times 5 = \frac{3}{4}$ లో $\frac{5}{6}$ అగుచున్నది.

$\frac{3}{4} \div 6$ అనగా 3 ను 4 చే భాగించి దానిని 6 చే భాగించుటకదా?

భాజ్యమును ఒకభాజకముచే భాగించి లబ్ధమును మరియొకభాజకముచే భాగించవచ్చులబ్ధము, భాజ్యమును 1, 2 భాజకములయొక్క గుణనఫలముచే భాగించవచ్చులబ్ధముతో సమమే యగుచున్నది. (20 పుట 3 సి చూ)

$\therefore \frac{3}{4} \div 6 = 3 \div (4 \times 6) = \frac{3}{4\times 6}$

(1) అను:— దీనింబట్టి భిన్నసంఖ్యను అభిన్నసంఖ్యచే భాగించవలసినచో అభిన్నసంఖ్యచే భిన్నసంఖ్యయొక్క హారమును గుణించవలయును అని తెలియుచున్నది.

పిమ్మట $\frac{3}{4\times 6} \times 5$ దీని అర్థము 1 టిని 24 చే భాగించగా 24 వ వంతులు 3 అవియా వాటిని 5 చే గుణించవలయునుగదా?

కావున అట్టియా 24 వ వంతులను 5 చే గుణించగా 24 వ వంతులు 15 అగుచున్నవి. $\therefore \frac{3}{4\times 6} \times 5 = \frac{3\times 5}{4\times 6}$ అని సిద్ధించుచున్నది.

(2) అను:— దీనింబట్టి భిన్నసంఖ్యను అభిన్నసంఖ్యచే గుణించవలసినచో అభిన్నసంఖ్యచే భిన్నసంఖ్యయొక్క అంశమును గుణించవలయునని తెలియుచున్నది.

ఇట్లు ప్రభాగజాతిసూత్రము ఉపపన్నము అగుచున్నది.

ఇచట $\frac{3\times 5}{4\times 6} = \frac{15}{24}$ దీనిని 3 చే సంక్షేపింపగా $\frac{5}{8}$ అగుచున్నది.

కాని సూత్రోక్త ఈ $\frac{3\times 5}{4\times 6}$ రూపమునందే 3 చే 6 అపవర్తింపబడుచున్నది. కావున నట్లు అపవర్తించినపిమ్మట గుణనముచేసినచో సంక్షేపరూపమే వచ్చుచున్నది.

$$\therefore \frac{3\times 5}{4\times 6} = \frac{1\times 5}{4\times 2} = \frac{5}{4\times 2} = \frac{5}{8}$$

(2) అను:— కావున ప్రభాగజాతియందు హారములును అంశములును అనేకములున్నచో ఒక అడ్డగీతకు పైభాగమున అంశములన్నిటిని మధ్యమధ్య గుణనచిహ్నములతో వ్రాసి క్రింద హారములన్నిటిని మధ్యమధ్య గుణనచిహ్నములతో వ్రాసి యథాసంభవముగ హారాంశములను అపవర్తించి శేషించిన అంశములను పరస్పరము గుణించవలయును. శేషించినహారములను పరస్పరము గుణించవలయును అని తేలుచున్నది.

(3) ఉదా:— $\frac{2}{3}$ లో $\frac{3}{4}$ లో $\frac{4}{5}$ లో $\frac{5}{6}$ లో $\frac{6}{7}$ లో $\frac{7}{8}$ ఎంతయగును?

$$\frac{2}{3} \text{ లో } \frac{3}{4} \text{ లో } \frac{4}{5} \text{ లో } \frac{5}{6} \text{ లో } \frac{6}{7} \text{ లో } \frac{7}{8} = \frac{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7}{3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8}$$

$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ అగును. ఇట్లుంటేటు గ్రహించవలయును.

అత్రోద్దేశకః

ద్రమ్మార్ధత్రిలవద్వయస్య సుమతే పాదత్రయం యద్భవేత్
పఞ్చాంశేన షోడశాంశ చరణః సంప్రార్థితేనార్థినే,
దత్తో యేన వరాటకాః కతి కదర్యేణార్పితాస్తేన మే
బ్రూహి త్వం యది వేత్సి వత్స గణితే జాతిం ప్రభాగాభిధామ్.

న్యాసః ౧/౧, ౧/౨, ౨/౩, ౩/౪, ౧/౫, ౧/౧౬, ౧/౪ అపవర్తితే

జాతం ౬/౭౬౮౦ వరాటకగుణనే కృతే జాతం ౧/౧౨౮౦ ఏకో దత్తో వరాటకః.

ఇతి ప్రభాగజాతిః.

నా! బుద్ధిమంతుడా! లోభియైనయొక వ్యక్తిచే యాచకునికొరకు ద్రమ్మములోని సగములోని మూడవవంతులో రెండింటియొక్క నాలుగవవంతులలో మూడు ఎంతయగునో అందలి 5 వ వంతులోని 16 వ వంతులో నాలుగవవంతు ఇవ్వబడినది. ఆలుబ్ధునిచే గవ్వలెన్ని ఇవ్వబడినవి? వత్సా! నీవు గణితమునందు ప్రభాగమను పేరుగల జాతిని తెలిసితివేని నాకుచెప్పుము.

న్యాసము. ౧ లో $\frac{1}{2}$ లో $\frac{2}{3}$ లో $\frac{3}{4}$ లో $\frac{1}{5}$ లో $\frac{1}{16}$ లో $\frac{1}{4}$ ఎంతయగును?

ఇందు మొదటనున్న 1 టి ఒకద్రమ్మమనుకొని దానిని నిష్పన్నమైనసంఖ్య ఎట్టిది?

[illegible] $\frac{1}{1}$ లో $\frac{1}{2}$ లో $\frac{2}{3}$ లో $\frac{3}{4}$ లో $\frac{1}{5}$ లో $\frac{1}{16}$ లో $\frac{1}{6}$ =

$$\frac{1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 1 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 16 \times 6} = \frac{1}{1380}$$ [illegible] 1380 [illegible]

[illegible] 1 [illegible]

ప్రశ్నములు.

(1) [illegible] ఎంత? (2) 100 లో [illegible] ఎంత? (3) [illegible] ఎంత? (4) [illegible] ఎంత ?

(5) [illegible] ఏమియిచ్చును ?

భాగానుబంధ భాగాపవాహములు.

[illegible]

[illegible]

74, ప్రి. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$2 + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4 + 1}{4} = \frac{8 + 1}{4} = \frac{9}{4}$ [illegible]

[illegible] $\frac{1}{4} = \frac{3 \times 4 - 1}{4} = \frac{12 - 1}{4} = \frac{11}{4}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

సాంశానుబంధసాంశాపవాహములు.

[illegible]

[illegible]

75. ప్ర. స్వాంశానుబంధ స్వాంశాపవాహములను భాగజాతిగ మార్చుట.

[illegible]

[illegible]

ఉదా:—(1) $\frac{3}{5}+$ స్వ $\frac{4}{7}$ (2) $\frac{3}{5}$ — స్వ $\frac{4}{7}$

[illegible]

$$\frac{3}{5}+ \text{స్వ} \frac{4}{7} = \frac{3\times(7+4)}{5\times7} = \frac{3\times11}{5\times7} = \frac{33}{35}$$

ఇట్లు $\frac{3}{5}$ — స్వ $\frac{4}{7} = \frac{3\times(7-4)}{5\times7} = \frac{3\times3}{5\times7} = \frac{9}{35}$

ఉపపత్తి: [illegible]

[illegible]

[illegible]

(71 ప్ర చే) $\frac{3}{5} = \frac{3\times7}{5\times7} \therefore \frac{3}{5} + \left(\frac{3\times5}{5\times7}\right) = \frac{3\times7}{5\times7} + \frac{3\times4}{5\times7} =$

$$\frac{21}{35} + \frac{12}{35} (1)$$

ఇట్లు $\frac{3}{5}$ — స్వ $\frac{4}{7} = \frac{3\times7}{5\times7} - \frac{3\times4}{5\times7} = \frac{21}{35} - \frac{12}{35} (2)$

పై (1) (2) సంఖ్యలయందు 1 ని 35 భాగములుగాచేసి అందలి 21 భాగ[illegible] 1 ని 35 భాగములుగ చేసి అందలి 12 భాగములను [illegible] అంతరమును [illegible] స్పష్టమగుచున్నది. [illegible] 35 భాగములలో 21 భాగములయొక్కయు 12 భాగములయొక్కయు యోగము 21 + 12 అగు[illegible]. అంతరము 21 — 12 అగుచున్నది (74 ప్ర [illegible])

[illegible] $\frac{21}{35} + \frac{12}{35} = \frac{21+12}{35}$ ఇట్లు $\frac{21}{35} - \frac{12}{35} = \frac{21-12}{35}$

[illegible]

$\frac{3}{5} +$ స్వ $\frac{4}{7} = \frac{21+12}{35} = \frac{(3\times7)+(3\times4)}{5\times7} = \frac{3\times(7+4)}{5\times7}$ (18 [illegible])

ఇట్లు $\frac{3}{5}$ — స్వ $\frac{4}{7} = \frac{21-12}{35} = \frac{(5\times7)-(3\times4)}{5\times7}$

$$= \frac{3\times(7-4)}{5\times7} \text{ [illegible]}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

న్యాసః $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ [illegible] $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

(1) ఉదా: $\frac{1}{4} + స్వ\frac{1}{3} + స్వ\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{3+1}{3} \times \frac{2+1}{2}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

(2) ఉదా: $\frac{2}{3} - స్వ\frac{1}{8} - స్వ\frac{3}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{8-1}{8} \times \frac{7-3}{7}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{7}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{3}$

(3) ఉదా: $\frac{1}{2} - స్వ\frac{1}{8} + స్వ\frac{9}{7} = \frac{1}{2} \times \frac{8-1}{8} \times \frac{9+7}{7}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} \times \frac{16}{7} = \frac{16}{16} = \frac{1}{1}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$\frac{4096}{1} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}$ [illegible]

[illegible]

$\frac{4096}{1} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} = 5105\frac{201}{800}$ [illegible]

[illegible] 4096 [illegible] 1105 [illegible]

2. [illegible] 16 [illegible]

[illegible]

$\frac{16 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15}{1 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16} = \frac{15 \times 15 \times 15 \times 15}{16 \times 16 \times 16} = \frac{50625}{4096} = 12\frac{1473}{4096}$

[illegible]

[illegible]

(1) [illegible] (3) 30 [illegible]

(2) [illegible] (4) [illegible]

[illegible]

[illegible]

భిన్నసంకలన వ్యవకలనములు.

76. [illegible] (72 [illegible]) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$$

[illegible]

విశేషము:— [illegible]

ఉదా: $2\frac{1}{4}+5\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ [illegible] ?

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

(5) [illegible]

(6) [illegible]

(7) [illegible]

(8) [illegible]

భిన్న గుణనము.

అథ భిన్న గుణనే కరణసూత్రం వృత్తార్థమ్.

[illegible] లబ్ధం విభిన్నే గుణనే ఫలం స్యాత్ [illegible]

[illegible]

77. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(1) [illegible] $\frac{7}{3} \times \frac{15}{7} = \frac{7 \times 15}{3 \times 7} = \frac{105}{21} = \frac{5}{1}$

(2) [illegible] $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$ [illegible]

[illegible]

$\frac{7 \times 15}{3 \times 7} = \frac{15}{3} = 5$ [illegible]

[illegible]

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{9}{10} = \frac{2 \times 9}{6 \times 10} = \frac{6}{6 \times 5} = \frac{6}{30}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] (73 [illegible] 2 [illegible])

$\frac{5 \times 2}{6}$ [illegible] $\frac{5 \times 2}{3} \div 3 = \frac{5 \times 2}{3 \times 3}$ [illegible]

(73 [illegible] 1 [illegible]).

[illegible] $\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{6 \times 3}$ [illegible]

[illegible] $\frac{5}{6} \times 2 = \frac{5 \times 2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ [illegible] $\frac{5 \times 2}{6} = \frac{5 \times 1}{3} = \frac{5}{3}$

(3) [illegible]

ప్రశ్నములు.

ఈ క్రింది భిన్నముల గుణనఫలములను చెప్పుము.

(1) [illegible] × [illegible] (4) ([illegible] — [illegible]) × [illegible]
(2) [illegible] × [illegible] (5) ([illegible]) × ([illegible])
(3) ([illegible]) × [illegible] (6) [illegible] × [illegible] × [illegible] × [illegible]

భిన్న భాగహారము.

అథ భిన్నభాగహారే కరణసూత్రం వృత్తార్ధం
ఛేదం లవం చ పరివర్త్య హరస్య శేషః కార్యోథ భాగహరణే గుణనావిధిశ్చ

టీ॥ భాగహరణే = భాగహారమునందు, హరస్య = భాజకముయొక్క, ఛేదం = హారమును, లవం చ = అంశమును, పరివర్త్య = తారుమారుచేసి, అథ = పిమ్మట, శేషః = మిగిలిన, గుణనావిధిశ్చ = గుణనవిధానమును, కార్యః = చేయవలెను.

78. ప్ర. భాజకముయొక్క హారాంశములను తారుమారుచేసి పిమ్మట భాజ్యమును భాజకముచే గుణింపుము, అది భాగఫలము అగును.

అత్రోద్దేశకః

సత్ర్యంశరూపత్రితయేన పంచ త్ర్యంశేన షష్ఠం వద మే విభజ్య।
దర్భీయగర్భాగ్రసుతీక్ష్ణబుద్ధిః చేదస్తి తే భిన్నహృతౌ సమర్థా॥

న్యాసః [illegible]

యథోక్తకరణేన జాతం [illegible]

అతిభిన్న భాగహారః.

79.

(2)

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7^2}{2^2} = \frac{49}{4}$$

(2) $\sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7 \times 7}{2 \times 2} = \frac{7^2}{2^2}$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{7}{3} \times \frac{7}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{7 \times 7 \times 7}{3 \times 3 \times 3} = \frac{7^3}{3^3}$$

80.

(1)

$$\frac{56}{32} = \frac{2 \times 28}{2 \times 16} = \frac{2 \times 2 \times 14}{2 \times 2 \times 8} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 4}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 42\,)\;\overline{100}\;(\\ 84 \\ 443\,)\;\overline{1600}\;(\\ 1329 \\ 4466\,)\;\overline{27100}\;(\\ 26796 \\ \text{శేషము}\;\overline{304} \end{array}$$

) 5.000000 (2236

ఇచట వర్గమూలము 2236 అగుచున్నది. శేషము 304 వచ్చినది. ఈ శేషమును విడుచుటచే మూలము ఆసన్నమూలముగా గలదు. కాని ఈ మూలసంఖ్య 2236 కల్పితవర్గసంఖ్యయొక్క మూలమగుట 1000 చేత భాగింపవలయును. అట్లు భాగింప 5 యొక్క ఆసన్నమూలమగును

$\therefore$ 5 కు $\frac{2236}{1000} = 2\frac{236}{1000}$ ఆసన్నమూలమగుచున్నది.

ఉదాహరణము: $\frac{2}{3}$ నకు ఆసన్న వర్గమూలము కనుగొనుము.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2 \times 3 \times 100^2}{3^2 \times 100^2} = \frac{60000}{3^2 \times 100^2} \;(70 \text{ వ పేజీ చూ})$$

$$\therefore \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{60000}}{\sqrt{3^2 \times 100^2}} = \frac{\sqrt{60000}}{\sqrt{3^2 \times 100^2}} = \frac{\sqrt{60000}}{3 \times 100} = \frac{244}{300}$$ శేషము 464

పద్ధతి పైరీతిగా జరుగుచున్నది. శేషమును విడిచిపెట్టుటచే ఆసన్నమూలమగుచున్నది. ఎట్లనగా శేషము 464 ను విడిచిపెట్టగా మిగిలిన సంఖ్య $\frac{244}{300}$, దీనియొక్క వర్గము $\frac{59536}{90000}$ దీనిని వర్గసంఖ్యను $\frac{2}{3}$ లో తీసివేయగా అంతరము అతిస్వల్పముగ మిగులుచున్నది. ఎట్లనగా:—

$$\frac{2}{3} - \frac{59536}{90000} = \frac{60000 - 59536}{90000} = \frac{464}{90000} = \frac{29}{5625}$$ ఇది శేషమగుచున్నది.

అనగా 1కి 5625 భాగములు చేయగా అందు భాగములలో 29 భాగములు ఎంతో అంత శేషమగుచున్నది కాని ఇది స్వల్పాంతరమగుటచే ఆసన్నమూలమని చెప్పబడినది.

ఈ $\frac{2}{3}$ నకు ఇదివరలో 100 యొక్క వర్గము గ్రహించి ఉదాహరణము చేసితిమి. ఇప్పుడు 1000 యొక్క వర్గమును గ్రహించి ఆసన్నమూలమును కనుగొనుము:—

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6000000}}{3 \times 1000} = \frac{2449}{3000}$$ శేషము 2399 అగుచున్నది. అనగా

$$\frac{2}{3} - \left(\frac{2449}{3000}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{5997601}{9000000} = \frac{2399}{9000000}$$ ఇది శేషమగుచున్నది. కనుక

100 యొక్క వర్గము గ్రహించినపుడు $\frac{29}{5625}$ శేషమగుచున్నది. సహస్రవర్గము గ్రహించుటచే $\frac{2399}{9000000}$ శేషమగుచున్నది. ఈ రెండింటిలోను $\frac{2399}{9000000}$ ఈ సంఖ్యయే చిన్నదియగుచున్నది. సమచ్ఛేదములుగ చేసినచో ఈ అంతరము బాగుగ స్పష్టమగును.

$$\frac{29}{5625} > \frac{2399}{9000000} = \frac{46400}{9000000} > \frac{2399}{9000000}$$

(4) కాబట్టి గుణకము పెద్దసంఖ్యయైనకొలదియు మూలము సూక్ష్మమగుచున్నది.

(5) $\frac{2}{3}$ ఈ సంఖ్యయొక్క ఆసన్నమూలానయనమందు 100 యొక్క వర్గమును గ్రహించినప్పుడు శేషము 464 మిగిలినది. ఇది అప్పటి భాజ్యము 464 నకు ఇంచుమించుగ సరిపడియున్నది. కాబట్టి దానిని విడుచుటకంటె మూలమునందు ఈ శేషమునిమిత్తము 1 టి కలుపుకొన్నచో సూక్ష్మముగ నుండును. అనగా ఆసన్నమునకు లభించిన మూలము 244 ఇందు 1 టిని కలుప 245. దీనిని మూలాంశముగ కొనుటచే మూలము అత్యాసన్నమగును. ఎట్లనగా:—

$$\frac{2}{3} - \left(\frac{244}{300}\right)^2 = 464$$ శేషము. ఇట్లు $$\frac{2}{3} - \left(\frac{245}{300}\right)^2 = \frac{60000}{90000} - \frac{60025}{90000}$$

మనము లబ్ధమును అధికముగా గ్రహించితిమి గాన ఋణశేషమువచ్చును.

$\frac{2449}{3000} = \frac{816}{1000} = .816$ [illegible]

[illegible] $\frac{2449}{3000}$ [illegible] $\frac{245}{300}$ [illegible]

(2) [illegible] $\frac{245}{300}$ [illegible] .81666 [illegible]

[illegible]

§2. [illegible] (1) [illegible] $\frac{2449}{3000}$ [illegible] $\frac{245}{300}$ [illegible]

[illegible] $\frac{2449}{3000}$ [illegible] $\frac{245}{300}$ [illegible]

[illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(1) [illegible] $\frac{69}{151}$ [illegible]

$$\frac{69}{151} = \cfrac{1}{\cfrac{151}{69}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{13}{69}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{69}{13}}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{4}{13}}}$$

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\cfrac{13}{4}}}} \qquad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}$$

[illegible]

దీనిని ఒకరీతిగ వ్రాయవచ్చును.

$\frac{1}{2+}\frac{1}{5+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4}$ ఇట్లు వ్రాసినయెడల [illegible]

ఇందు మొదటిలబ్ధము $\frac{1}{2}$ ఇది మొదటి ఆసన్నమానము. [illegible]

వరకును $\frac{1}{2+}\frac{1}{5}$ గ్రహించి సవర్ణించగా $\frac{1}{2+\frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{11}{5}} = \frac{5}{11}$ ఇది రెండవ ఆసన్నమానము.

ఇట్లే $\frac{1}{2+}\frac{1}{5+}\frac{1}{3} = \frac{1}{2+\frac{3}{16}} = \frac{16}{35}$ ఇది [illegible]

ఇట్లే $\frac{1}{2+}\frac{1}{5+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4} = \frac{1}{2+}\frac{1}{5+}\frac{4}{13} = \frac{1}{2+}\frac{13}{69} = \frac{69}{151}$ నాలవ మానము.

(2) ఉదా: $\frac{138}{107}$ దీనియొక్క [illegible] ఆసన్నమానములు [illegible]

ఇందు మొదటభాగాహారము [illegible]

[illegible] అట్లు చేయగా [illegible]

$1+\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}$ ఇందు మొదటిలబ్ధము 1, రెండవ లబ్ధము 3, దానిచే పరతభిన్నసంఖ్య $1+\frac{1}{3}$ [illegible]

భిన్నసంఖ్య $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{2}$ ఇట్లు [illegible]

సవర్ణించగా క్రమముగ ఆసన్నమానములు. 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{40}{31}$, $\frac{49}{38}$, $\frac{138}{107}$

ఇందు మొదటిసంఖ్య 1 [illegible] $\frac{138}{107}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

89. ప్ర. ఆసన్నమానావధారణము [illegible]

[illegible] భిన్నసంఖ్యయొక్క [illegible] భాగించగా (మరియొకసాకు [illegible]) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] ఆసన్నమానములు [illegible]

[illegible] మొదటి లబ్ధము మొదటి ఆసన్నమానము. [illegible] 1 [illegible]

[illegible] రెండవలబ్ధముచే మొదటిఆసన్నమానము [illegible]

[illegible] రెండవఆసన్నమానము. [illegible]

[illegible]

[illegible] ఆసన్నమానము [illegible]

[illegible] ఆసన్నమానముయొక్క [illegible]

[illegible] ఆసన్నమానములగును. [illegible]

ఉద్దిష్టసంఖ్యతో [illegible]

```
107 ) 138 ( 1
      107
      ---
       31 ) 107 ( 3
             93
            ---
             14 ) 31 ( 2
                  28
                  --
                   3 ) 14 ( 4
                       12
                       --
                        2 ) 3 ( 1
                            2
                            -
                            1 ) 2 ( 2
                                2
                                -
```

[illegible] (2) [illegible] $\frac{183}{107}$ [illegible]

[illegible] 1, 3, 2, 4, 1, 2 [illegible] $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$ [illegible] 1, 3, 2, 4, 1, 2 [illegible] [illegible] 3 [illegible] 2 [illegible] 4 [illegible] 3 [illegible] $\frac{36+4}{28+3} = \frac{40}{31}$ [illegible]

84. [illegible] (1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible] 1 [illegible]

(4) [illegible]

([illegible])

(1) [illegible] 28 [illegible] 28, [illegible] 5 [illegible]

$$\sqrt{28} - 5 = \frac{\sqrt{28} - 5}{1} = \frac{(\sqrt{28} - 5) \times (\sqrt{28} + 5)}{\sqrt{28} + 5} = (7 \text{ [illegible]})$$

$$= \frac{\sqrt{28}^2 - 5^2}{\sqrt{28} + 5} (\text{[illegible]}) = \frac{28 - 25}{\sqrt{28} + 5} = \frac{3}{\sqrt{28} + 5} = \frac{1}{\frac{\sqrt{28} + 5}{3}}$$

[illegible] $\frac{\sqrt{28} + 5}{3}$ [illegible] 28 [illegible] 5 [illegible] 10 [illegible] 3 [illegible]

$$\frac{\sqrt{28} + 5}{3} = 3 + \frac{\sqrt{28} + 5}{3} - 3 = 3 + \frac{\sqrt{28} + 5 - 9}{3} = 3 + \frac{\sqrt{28} - 4}{3}$$

[illegible]

$$\frac{\sqrt{28}-4}{3} = \frac{(\sqrt{28}-4)\times(\sqrt{28}+4)}{3\times(\sqrt{28}+4)} = \frac{28-16}{3\times(\sqrt{28}+4)} = \frac{4}{\sqrt{28}+4}$$

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{28}+4}{4}}$ [illegible] 28 [illegible] 5 [illegible] 4 [illegible] 4 [illegible]

[illegible] 2 [illegible]

[illegible] $\dfrac{\sqrt{28}+4}{4} = 2 + \dfrac{\sqrt{28}+4-8}{4} = 2 + \dfrac{\sqrt{28}-4}{4}$ ∴ 2 [illegible]

[illegible] $\dfrac{\sqrt{28}-4}{4} = \dfrac{(\sqrt{28}-4)\times(\sqrt{28}+4)}{4\times(\sqrt{28}+4)} = \dfrac{28-16}{4\times(\sqrt{28}+4)} = \dfrac{3}{\sqrt{28}+4}$

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{28}+4}{3}}$ [illegible] $\dfrac{\sqrt{28}+4}{3} = 3 + \dfrac{\sqrt{28}+4-9}{3} = 3 + \dfrac{\sqrt{28}-5}{3}$ [illegible]

3 [illegible]

[illegible] $\dfrac{\sqrt{28}-5}{3} = \dfrac{(\sqrt{28}-5)\times(\sqrt{28}+5)}{3\times(\sqrt{28}+5)} = \dfrac{28-25}{3\times(\sqrt{28}+5)}$

$\dfrac{1}{\frac{\sqrt{28}+5}{1}}$ [illegible] $\dfrac{\sqrt{28}+5}{1} = 10 + \dfrac{\sqrt{28}+5-10}{1} = 10 + \dfrac{\sqrt{28}-5}{1}$

[illegible] 10 [illegible]

[illegible] $\dfrac{\sqrt{28}-5}{1}$ [illegible]

$$\sqrt{28} = 5 + \frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{10+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{10}$$ [illegible]

[illegible]	5	3	2	10	3	2	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\sqrt{\frac{5}{3}}$ [illegible]

$\dfrac{5}{3} = \dfrac{5\times3}{3\times3}$ ∴ $\sqrt{\frac{5}{3}} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$ (70 [illegible], 73 [illegible])

(84 [illegible]) [illegible]

$$\sqrt{\tfrac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{3+\sqrt{15}-3}{3} = 1 + \frac{\sqrt{15}-3}{3} = 1 + \frac{6}{3(\sqrt{15}+3)}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{15}+3}{2}}$$

[illegible] $\dfrac{\sqrt{15}+3}{2} = 3 + \dfrac{\sqrt{15}-3}{2} = 3 + \dfrac{6}{2(\sqrt{15}+3)} = 3 + \dfrac{1}{\frac{\sqrt{15}+3}{3}}$

[illegible] $\dfrac{\sqrt{15}+3}{3} = 2 + \dfrac{\sqrt{15}-3}{3} = 2 + \dfrac{6}{(\sqrt{15}+3)3}$

$$= 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{15}+3}{2}}$$ [illegible]

[illegible]

[illegible] 1, 2, 3, 4, [illegible]

$$\sqrt{?} = ? + \frac{1}{3+}\frac{1}{?+}\frac{1}{?+}\frac{1}{?}$$ [illegible]

[illegible] ...

[illegible]

86. [illegible] (1) [illegible] (81 [illegible]) 7, 8, 9 [illegible]

[illegible] $2\frac{236}{1000} = 2.236$ [illegible] $\frac{816}{1000} = .816$ [illegible] $\frac{62}{100} = .62$ [illegible]

[illegible]

(2) [illegible]

[illegible] 2.236, .816, .047, .009 [illegible]

$2.236 = 2\frac{236}{1000}$, $.816 = \frac{816}{1000}$, $.047 = \frac{47}{1000}$, $.009 = \frac{9}{1000}$ [illegible]

(3) [illegible] 1, 2, 3 [illegible]

(4) [illegible]

$7 = .70 = .700$ [illegible] 7 [illegible] $\frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1000}$ [illegible]

87. [illegible] (1) [illegible]

[illegible]

(2) [illegible]

(1) [illegible] $\frac{22}{5}$ [illegible]

5) 22 (4.4
20
20
20

[illegible] $\frac{22}{5} = 4.4$ [illegible]

[illegible]

(2) [illegible] $\frac{2}{5}$ [illegible]

5) 2 (0.4
20
20

∴ $\frac{2}{5} = .4$ [illegible]

(3) [illegible] $\frac{3}{125}$ [illegible]

125) 3 (0.024
0
30
300
250
500
500

∴ $\frac{3}{125} = 0.024$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{3}{125} = \frac{3 \times 8}{125 \times 8} = \frac{24}{1000} = .024$ [illegible]

[illegible]

(4) [illegible] $\frac{6}{7}$ [illegible]

7) 6.000 000 ...
0.857 142 85 ...

$= .857142$

[illegible]

[illegible]

(5) [illegible] $\frac{5}{6}$ [illegible]

6) 5.00 00 00
0.83 33 33

[illegible]

[illegible]

(6) [illegible] $\frac{2}{3}$ [illegible]

3) 2.00 00 00
.66 66 66

$\frac{2}{3} = .666666$ [illegible]

(8) [illegible] 1 [illegible]

[illegible] (6) [illegible]

$\frac{2}{3} - \frac{666}{1000}$ [illegible]

[illegible] $\frac{2}{3} - \frac{666}{1000} = \frac{2000}{3000} - \frac{1998}{3000} = \frac{2}{3000}$

[illegible]

[illegible] $\frac{2}{3} - \frac{667}{1000}$ [illegible] $\frac{667}{1000} - \frac{2}{3} = \frac{2001}{3000} - \frac{2000}{3000} = \frac{1}{3000}$

[illegible]

[illegible]

Scanned by CamScanner

87. ప్రి. అట్టి దశాంశసంఖ్యలను పూర్ణములను వ్రాయుచుండినగాని సంకలనాదికమును చేయవచ్చును. కాబట్టి నిండు సముచ్ఛేదీకరణ జేయవలసియుండదు. అట్టి దశాంశపరికర్మలను సంగ్రహముగ తెలుసుకొనవలెయున్నది.

దశాంశసంకలనము.

దశాంశసంఖ్యలను సంకలనము చేయుటకు ఒకదాని దశాంశచిహ్నము క్రిందుగ మరియొకదాని దశాంశచిహ్నము నుండునట్లు వ్రాసి అభిన్నసంఖ్యలవలెనె సంకలనము చేయవలెను. యోగమునందు పైదశాంశచిహ్నముల క్రిందుగా దశాంశచిహ్నమును వ్రాయవలెను.

ఉదా: 457.329, 545.97, 50.8, .987 వీటియోగ మెంత?

```
       457.329
       545.97
        50.8
          .987
యోగము 1055.086
```

అన్ని సంఖ్యలయొక్కయు బిందువులు ఒక నిలువుపంక్తిగ (స్తంభముగ) నుండుటవలన అభిన్నసంఖ్యలయొక్క ఏకాదిస్థానాంకములను ఒక నిలువుపంక్తిగ వ్రాయబడినవియై యున్నవి. దశాంశచిహ్నమునకు కుడిప్రక్కనున్న సంఖ్యలను దశాంశసంఖ్యలనియు దశాంశములనియు వ్రాయబడినవి యని సజాతీయ అంకములు ఒకదానిక్రింద నొకటి వ్రాయబడినవి యనుట యున్నది. యోగవియోగములు సజాతీయములకే చేయవలెను గాన సజాతీయాంకములే ఒక నిలువుపంక్తిలో నుండునట్లు వ్రాయబడినవి. దీనిని బాగుగ గమనించినచో దీనియుపపత్తి స్పష్టము కాగలదు.

మరియు (86 ప్రి 4 చే) .97 = .970 అట్లు .8 = .800 కాబట్టి

$$\left.\begin{array}{r}.329\\.970\\.800\\.987\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}.329\\.97\\.8\\.987\end{array}\right.$$

$$3{\cdot}086 = 3{\cdot}086$$

ఇట్లు దశాంశస్థానములకు తగిన సున్నలను నింపినవలెనె వ్రాసి కలుపుట సమచ్ఛేదము చేసి కలుపుటయే యగుచున్నది. అట్టి భిన్నసంఖ్యలను కలిపి భాగహారములుగ మార్చి పూర్ణాంకములను అభిన్నసంఖ్యలతో కలుపుటయు నగుచున్నది.

దశాంశ వ్యవకలనము.

88. ప్రి. అంతరము చేయబడిన దశాంశసంఖ్యలలో పెద్దసంఖ్యక్రింద చిన్నసంఖ్యను వ్రాయవలెను. (ఏసంఖ్యయందు అభిన్నభాగముండదో అనగా బిందువునకు ఎడమవైపునున్న సంఖ్య పెద్దదగునో ఆసంఖ్య పెద్దసంఖ్య. అభిన్నభాగము సమమైనచో దశాంశభాగమును బట్టి పెద్దచిన్న సంఖ్యలని గ్రహింపవలెను) వియోజ్యవియోజకములలో దశాంశస్థానములు భిన్నముగ నున్నచో తక్కువస్థానములుగల సంఖ్యకు తగినన్ని సున్నలను చేర్చి పైసంఖ్యయొక్క దశాంశచిహ్నమునకు క్రిందసంఖ్యయొక్క దశాంశచిహ్నము నుండునట్లు వ్రాసి అభిన్నసంఖ్యలవలెనె వ్యవకలనము చేయవలెను.

(1) ఉదా: 34.43 — 22.397 ఎంతయగును

```
వియోజ్యము  34.430
వియోజకము  22.397
అంతరము    12.033
```

(2) ఉదా: .9876, 32.02 వీటియంతర మెంత?

```
32.0200
  .9876
31.0324 అంతరము.
```

దీని యుపపత్తి సంకలనమునందువలె గమనింపదగియున్నది.

దశాంశగుణనము.

89. ప్రి. దశాంశసంఖ్యలను అభిన్నసంఖ్యలుగ భావించి గుణనము చేయవలెను. పిమ్మట గుణ్యముయొక్కయు గుణకముయొక్కయు భిన్నభాగమందు ఎన్నెన్నిస్థానములు గలవో ఆస్థానముల రెంటియొక్కయు యోగముతో సమమైన స్థానములను కుడిప్రక్కనుండి లెక్కించి ఆస్థానసంఖ్యకు ఎడమ గుణనఫలమునందు దశాంశచిహ్నము నుంచవలెను. అన్నిస్థానములు గుణనఫలమున లేనిచో ఆసంఖ్యకు ఎడమవైపున ఎన్ని తక్కువయగునో అన్నిస్థానములందు సున్నలను వ్రాసి వాటికి ఎడమవైపున బిందువును వ్రాయవలెను.

(1) ఉదా: 34.258 [illegible] 2.50 [illegible]

గుణ్యము 34.356 [illegible]

గుణకము 2.25 [illegible]

```
      171780
     68712
    68712
గుణనఫలము 77·30100
```

[illegible]

(2) ఉదా: ·278 × ·024 ఎంతయగును ?

```
 ·278
 ·024
 1112
 556
·006672
```

[illegible]

(3) ఉదా: ·275 × ·04 ఎంతయగును ?

```
 ·275
 ·04
·24000
```

[illegible] ·24 [illegible]

(4) ఉదా: 43·397 × 1000 ఎంతయగును ?

43·397 × 1000 = 43397·000 = 43397 ([illegible])

[illegible] 43·397 × 100 = 4339·7

43·397 × 10 = 433·97

43·397 × 10000 = 433970

[illegible] 10, 100, 1000 [illegible] 10 [illegible]

[illegible] (1) [illegible]

$$34{\cdot}356 \times 2{\cdot}25 = \frac{34356}{1000} \times \frac{225}{100} =$$

$$\frac{34356 \times 225}{1000 \times 100} = \frac{7730100}{10^3 \times 10^2} = \frac{7730100}{10^5} = \frac{7730100}{100000} \text{ ([illegible])}$$

= 77·30100 [illegible]

దశాంశభాగహారము ?

80. [illegible]

(1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

(1) ఉదా: 15·825 ÷ 2·5 [illegible] ?

[illegible]

(2) ఉదా: ·15625 ÷ 2·5 లబ్ధమెంత ?

పైయుదాహరణమునందును ఈయుదాహరణమునందును అంకెలు ఒకవిధముగ నున్నను దశాంశచిహ్నము లేనియెడల సంఖ్యలు భేదించుచున్నవి. కావున లబ్ధమున ఆ అంకెలే రాగలవు. కాని దశాంశచిహ్నము 5 — 1 = 4 అగుటచే నాలుగంకెలకు ముందుండును. కాని 3 అంకెలే యుండుటచే ఒకసున్న వ్రాసి దానికి ఎడమప్రక్క దశాంశచిహ్నము వ్రాయగా అది లబ్ధమగును.

కావున ·0625 లబ్ధమగుచున్నది.

అట్లు 156·25 ÷ 2·5 అగుచో లబ్ధము 62·5 అగుచున్నది.

అట్లు 1562·5 ÷ 2·5 అగుచో లబ్ధము 625 అగుచున్నది.

అట్లు 15625 ÷ 2·5 అగుచో లబ్ధము 6250 అగుచున్నది.

(3) ఉదా: 19934·14 ÷ 5763 = లబ్ధమెంత ?

ఈ రెండుసంఖ్యలకును అభిన్నాంకములనువలె భాగహారము చేయగా "347" అను అంకెలు లభించుచున్నవి. కాని భాజకమునకంటె భాజ్యమునందలి దశాంశసంఖ్యలందు రెండుస్థానములు తక్కువగుటచే కుడిప్రక్కన రెండుసున్నలతో గూడిన 34700 లబ్ధమగుచున్నది.

(4) ఉదా: 37·5 ÷ 7·68 లబ్ధము ఎంత ?

```
7·68 ) 37·50 ( 4·8828125
       30 72
       ------
        6 780
        6 144
        ------
          6360
          6144
          ----
           2160
           1536
           ----
            6240
            6144
            ----
              960
              768
              ----
              1920
              1536
              ----
              3840
              3840
```

ఇచట భాజ్యశేషములలో క్రమముగ 7 సున్నలు చేర్చబడినవి. కావున భాజ్యమునందు దశాంశస్థానములు 9, భాజకమునందు రెండు. 9 – 2 = 7 లబ్ధమునందు దశాంశస్థానములు. కావున కుడిప్రక్కనుండి 7 అంకెలకు పూర్వము దశాంశచిహ్నము ఉంచబడినది.

(5) ఉదా: 12.2 ÷ 1.3 లబ్ధమెంత ?

```
1.3 ) 12.2 ( 9.384615
      11 7
      ----
        50
        39
        ---
        110
        104
        ---
         60
         52
         --
          80
          78
          --
           20
           13
           --
            70
            65
            --
శేషము =      5
```

తొలుత వచ్చిన 5 శేషముగ వచ్చువరకును భాగహారమునందు లబ్ధము గణింపబడినది. అనగా ఇటనుండి 3 మొదలుకొని యున్న అంకెలే క్రమముగ ఆవృత్తిగ వచ్చును. ఇంతవరకు చేర్చబడిన సున్నలు 6 కావున, భాజ్యమునందు దశాంశస్థానములు 7, భాజకమునందు 1కి లబ్ధమునందు 7 — 1 = 6 దశాంశస్థానములు కలవని తెలియుచున్నది.

6 ఉదా: 2.32 ÷ 100 లబ్ధమెంత ?

ఇచట భాజ్యముయొక్క శేషములలో రెండుసున్నలను చేర్చగా 232 అను అంకెలు లబ్ధముగ వచ్చుచున్నవి. కావున భాజ్యమునందలి దశాంశస్థానములు 4 భాజకమున దశాంశస్థానములు లేవు. కావున .0232 లబ్ధమగుచున్నది.

(1) అను:— దీనివలన 10యొక్క ఘాతాంకఘాతములగు 10,100,1000 మొదలగు సంఖ్యలచే దశాంశసంఖ్యను భాగింపవలసినచో భాజకమునందెన్ని సున్నలుగలవో దశాంశచిహ్నమునకు ఎడమప్రక్కన అన్నిస్థానములకు పూర్వమందు దశాంశచిహ్నము మార్చి వ్రాయవలయును. అన్నిస్థానములు దశాంశ లేనిచో ఎడమప్రక్క స్థానములందు సున్నలను వ్రాసి దశాంశచిహ్నము నుంచవలయును. అది లబ్ధము కాగలదు.

(2) అను:— ఇట్లు కుడివైపు సున్నలుగల ఒకానొక పూర్ణసంఖ్యచే దశాంశ సంఖ్యను భాగింపవలసినచో తొలుత పైరీతిగాను భాజకమందలి

మున్నులట్టి భాజ్యమునందు దశాంశచిహ్నము మారకుండ భాజకమందలి సున్నలను తీసివేసి అట్టి భాజకభాజ్యములచే పైభాగహారపద్ధతిచే లబ్ధమును గ్రహింపవలయును అట్లుగాను ఉద్దిష్టభాజక భాజ్యముల లబ్ధము రాగలదు.

ఉదాహరణ: 854.88 ÷ 2400

భాజకమునందు రెండుసున్నలున్నవి గాన

854·88 ÷ 2400 = 8·5488 ÷ 24 = .3562 అగుచున్నది.

ఇట్లుంచియును గ్రహింపవలయును.

పద్ధతియొక్క ఉపపత్తి:— 15.625 ÷ 2.5 అనునప్పుడు

$$\frac{15625}{1000} \div \frac{25}{10} = \frac{15625}{10^3} \div \frac{25}{10^1} = \frac{15625}{10^3} \times \frac{10^1}{25} = \frac{15625}{25} \times \frac{10^1}{10^3}$$

$$\frac{15625}{25 \times 10^3 \div 10^1} = \frac{15625}{25 \times 10^{3-1}} = \frac{15625}{25 \times 10^2} = \frac{625}{10^2} = \frac{625}{100} = 6.25$$

ఇట్లు భాజకముకంటె భాజ్యమునందు దశాంశస్థానము లెక్కువ యున్నప్పుడు పైప్రకారమే ఉపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది.

1988.14 ÷ .5729 ఇట్లు భాజ్యదశాంశస్థానములు తక్కువయైనప్పుడో,

$$\text{పైప్రకారము } \frac{198814}{100} \div \frac{5729}{10000} = \frac{198814}{5729} \times \frac{10^4}{10^2} = 347 \times 10^{4-2}$$

$$= 347 \times 10^2 = 347 \times 100 = 34700$$

దీనిచే అన్నిభాగహారములందును ఉపపత్తి గ్రహింపవలయును.

దశాంశఘాతము (వర్గఘనాదికము)

91. ప్ర. దశాంశసంఖ్యలకు ఏకఘాతము చేయవలసినచో అభిన్నసంఖ్యలకు వలెనే ఆయాఘాతములు నేసి ఆమూలసంఖ్యయందుగల దశాంశస్థానసంఖ్యను ఆఘాతమానాంకముచే గుణించిన వచ్చినన్ని స్థానములకు (కుడి ప్రక్కనుండి) కొనక దశాంశచిహ్నము నుంచవలయును.

(1) ఉదా:— 2.5 దీని ఘనమెంతయగును?

$(2·5)^3 = 15625$ ఇచట ఘాతమానాంకము 3 చే దశాంశస్థానసంఖ్య 1ను గుణించినచో 3 అన్ని స్థానములు గాన మూడు దశాంశస్థానములు, కాబట్టి 15·625 ఘనమగుచున్నది.

దశాంశగుణనపద్ధతిచే దీని ఉపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది.

దశాంశమూలములు

92. ప్ర. (1) దశాంశసంఖ్యయందలి అభిన్నభాగసంఖ్యయందు ఏకస్థానాంకము మొదలుకొని ఎడమవైపునకు గుర్తించి దశాంశసంఖ్యలోని అభిన్నసంఖ్యగా భావించి వర్గమూలమును ఘనమూలమును మొదలగు సంఖ్యను గనుగొనుము. అభిన్నభాగమునుండి సంఖ్యవలన లభించిన యంకములు మూలమునందభిన్నభాగములోనివి యగును. భిన్నభాగమందలి యంకములను శేషములతో చేర్చునప్పటినుండియు లభించిన యంకములు దశాంశస్థానములోనివి. కాబట్టి దశాంశచిహ్నమునకు కుడిప్రక్కనుండి యంకెలవలన లభించు అంకములను లబ్ధమునందు వ్రాయవలసినప్పుడు లబ్ధమునందు తొలుత దశాంశచిహ్నము వ్రాసి ఆ స్థానాంకములను వ్రాయవలెను.

(2) ఉద్దిష్టసంఖ్యయందు తుదను వర్గమూలమునందు రెండురెండు అంకెలను విడదీయగా 1 అంకెయే మిగిలినను, ఘనమూలమునందు 3 చేసి అంకెలను విడదీయగా 1, 2 అంకెలే మిగిలినను, లేకపోయినను మిగిలినను తుదనన్ని సున్నలను చేర్చుకొని గణితమును చేయవలెను.

వాస్తవముచే ఘాతపద్ధతినిబట్టి ఘాతమానమానాంకముచే మూలమునందలి దశాంశస్థానసంఖ్యను గుణింప వచ్చినన్ని దశాంశస్థానములు ఘాతమునందుండును. కాబట్టి ఘాతమునందలి దశాంశస్థానసంఖ్యను ఘాతమానాంకముచే భాగింపగా వచ్చినన్ని దశాంశస్థానములు ఆయా ఘాతమూలమునందుండును. ఈప్రకారము అభిన్నసంఖ్యగ దశాంశసంఖ్యను భావించి మూలమును గనుగొని దశాంశచిహ్నమును వ్రాయవచ్చును. కాని అటన్నిటియందే కొన్ని దశాంశసంఖ్యలను తుదిస్థానమును విడచినచో ఘాతమునందలి దశాంశస్థానసంఖ్య ఘాతమానాంకముచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడనట్లు తక్కువగును స్థానములందు

సున్నలను వ్రాసికొనవలసియుండును. ఇట్లు వ్రాసినప్పుడు అభిన్నసంఖ్యలయందలి మూలమును గమనించి దశాంశస్థానసంఖ్యను మూలమునందలి దశాంశముచే భాగించిన [illegible] అన్ని దశాంశస్థానములకు [illegible] దశాంశభిన్నము [illegible]. ఈ రీతిని చేయుటకై పైవ్రాసిన పద్ధతి చెప్పబడినది.

(1) ఉదా: 6·25 దీనికి వర్గమూలమెంత?

```
   ) 6·25 ( 2·5
     4
45 ) 225 (
     225
     ...
```

ఇందు అభిన్నభాగమందలి 6 వలన లభించిన వర్గమూలము 2 [illegible] దశాంశభిన్నము వ్రాయబడును. వర్గసంఖ్యయందు దశాంశసంఖ్య 25 ను [illegible] లభించిన 5 మూలమందు దశాంశసంఖ్య లోనిది.

కనుక 6·25 కు వర్గమూలము 2·5. వర్గసంఖ్యయందు దశాంశసంఖ్య 2 ను [illegible] వర్గమూలమునందు దశాంశస్థానము 2 కావున 2 చే భాగింప 1 టి మూలమునందు 1 దశాంశసంఖ్యయుండును అని తెలియుచున్నది.

(2) ఉదా. 42·31 దీనికి వర్గమూలమెంత?

```
    ) 42·31 ( 6·5046
      36
125 ) 631
      625
13004 ) 60000 (
        52016
130086 ) 798400
         780516
శేషము   17884
```

అభిన్నభాగమందలి 42 వలన మూలము 6 లభించినది. [illegible] భిన్నభాగమందలి [illegible] సున్నలతో చేర్చితిమి. [illegible] అభిన్నభాగసంబంధిమూలమునకు [illegible] దశాంశ [illegible] భిన్నభాగసంబంధి [illegible] వ్రాయబడినవి. [illegible] వర్గసంఖ్యయందు [illegible] మూలమెంత? అని ప్రశ్నించినచో [illegible] వర్గమూలమును గణింపవలయును.

[illegible] దశాంశగణితము [illegible] అవర్గసంఖ్యలగూర్చియు [illegible] బాలురకు [illegible] సంక్షిప్తముగ వ్రాసి నిరూపింపవలెను.

ఇతి భిన్నపరికర్మాష్టకము

4 ప్రకరణము.

శూన్యపరికర్మాష్టకము.

అథశూన్య పరికర్మసూత్రం సార్ధవృత్తద్వయం
యోగేఖం క్షేపసమం వర్గాదౌఖం ఖభాజితో రాశిః।
ఖహరస్స్యాత్ ఖగుణః ఖం ఖగుణశ్చింత్యశ్చ శేషవిధౌ ॥ ఆ
శూన్యేగుణకే జాతే ఖం హారశ్చేత్పున స్తదారాశిః।
అవికృతఏవజ్ఞేయః తథైవ ఖేనోనితశ్చయుతః॥ ఆ

టీ॥ యోగే = సంకలనమందు, ఖం = సున్న, క్షేపసమం = యోజ్యమునకు సమము [illegible] ఖం = సున్న, వర్గాదౌ = వర్గవర్గమూల [illegible] మొదలగువానియందు, ఖం = సున్న [illegible] ఖభాజితః = సున్నచే భాగింపబడిన, రాశిః = రాశి, ఖహరః = సున్నహారముగా గలదైనది స్యాత్ = అగును ఖగుణః = [illegible] (సున్నచే గుణింపబడిన రాశి) ఖం = సున్న [illegible] ఖగుణః = సున్నచే గుణింపబడిన రాశి శేషవిధౌ = మిగిలిన గణితము [illegible] చింత్యశ్చ = ఆలోచింపదగినది [illegible]. (ఎట్లనగా) శూన్యే = సున్న, గుణకే జాతే = గుణకమైయుండగా: ఖం హారః చేత్ = సున్న హారమైనను, తదా పునః = అప్పుడుమాత్రము, రాశిః = రాశి, అవికృతఏవ = యథాస్థితమైనదిగానే, జ్ఞేయః = తెలియదగినది, తథైవ = అట్లుగనే, ఖేన = సున్నచే, ఊనితశ్చ = తీసివేయబడినదియును, యుతశ్చ = కలుపబడినదియును [illegible] రాశి యథాస్థితముగానే తెలియదగినది) దీనితాత్పర్యము క్రిందముగ పరికర్మలచే వివరింపబడుచున్నది.

శూన్యసంకలనము.

93. ప్రి. సున్నను మరియొకసంఖ్యతో కలిపినను సున్నతో మరియొక సంఖ్యను కలిపినను అనగా సున్న యోజ్యమైనను రాశియైనను యోగము మరి

[illegible]

[illegible]	4	[illegible]	0	$4+0=4$
[illegible]	0	[illegible]	4	$0+4=4$
[illegible]	4	[illegible]	4	[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

94. ప్ర. (1) [illegible]

(2) [illegible]

[illegible]

† (1) [illegible]

$$(+5)+(+3)=+8 \quad [illegible] \quad (-5)+(-3)=-8$$
$$(+5)+(-3)=+2 \quad [illegible] \quad (-5)+(+3)=-2$$

(2) [illegible]

$$(+8)-(+5)=(+8)+(-5)=+3$$
$$(+8)-(-5)=(+8)+(+5)=+13$$
$$(-8)-(-5)=(-8)+(+5)=-3$$
$$(-8)-(+5)=(-8)+(-5)=-13$$
$$(+5)-(+8)=(+5)+(-8)=-3$$
$$(+5)-(-8)=(+5)+(+8)=+13$$
$$(-5)-(+8)=(-5)+(-8)=-13$$
$$(-5)-(-8)=(-5)+(+8)=+3$$

[illegible]

కగ్గా వచ్చెను. (ఇది బీజగణితమున చెప్పబడినది) అట్లుగాకే మన్నప్పటికిని ధన సంఖ్యను వ్యవకలించిన ఋణమగును. ఋణసంఖ్యను వ్యవకలించిన ధనమగును. ఈసంఖ్యలలో ధనము ఋణముగను, ఋణము ధనముగను, అయినదని చెప్పుచున్నది.

ఎట్లనగా: $0 - 5 = -5$ ఇది అంకగణితము.

శూన్యగుణనము.

95. వ్రి. సున్న గుణ్యమైనను, గుణకమైనను గుణనఫలము సున్నయే అగును.

---

(3) గుణ్యగుణకములు రెండును ధనములైనను రెండును ఋణములైనను గుణనఫలము ధనమగును. ఒకటి ధనము మరియొకటి ఋణము అయినచో గుణనఫలము ఋణము.

$$\left.\begin{array}{l}(+5)\times(+3) = +15,\ (-5)\times(-3) = +15 \\ (+5)\times(-3) = -15,\ (-5)\times(+3) = -15\end{array}\right\}$$ అగుచున్నది.

(4) భాగహారమందును లబ్ధము గుణనమందువలెనే గుణనఫలమువలె ధనము, ఋణము, అగును.

$$(+15)\div(+3) = +5,\ (-15)\div(-3) = +5$$

$$(-15)\div(+3) = -5,\ (+15)\div(-3) = -5$$

(5) ధనముయొక్క ఋణముయొక్క వర్గము ధనమగును, $(+5)^2 = +25$ అట్లు $(-5)^2 = +25$ ఇట్లు ఇదిరెండును సమానముగా గుణనముచేసినట్టి వర్గములు తెలియగలవు.

(6) ధనసంఖ్యకు వర్గమూలము ధనముగాని ఋణముగాని అగును. ఋణ సంఖ్యకు వర్గమూలము లేదు. ఋణసంఖ్యకు వర్గమూలము ఋణమగును. ధనసంఖ్యాగుణనములు ధనమే అగును. ఇట్టివి వర్గమూలములందును ఆ మూలములవిషయమై తెలుసుకొనవలెను. మూలము పూర్తిగా తెలియును. సమమగుచో మూలము ధనముగాని ఋణముగాని అగును.

ఉదా: $-0\times 4 = 0$ లేక $4\times 0 = 0$ ఇట్లు $0\times 0 = 0$ అగుచున్నది.

గుణనముగా ఆవృత్తి యొక్క సున్నను ఆవృత్తి చేసినను సున్నయే వచ్చును. సున్నను ఆవృత్తి చేసినను (అది గ్రహింపబడబోయినను) గుణనఫలము సున్నయే అగును.

97. వ్రి. సున్న భాజకమైన ఇతర సంఖ్య భాజ్యమైనచో సున్నహార మగు రాశి (ఖహరము) లబ్ధమగును.

(1) ఉదా: 5 భాజ్యము 0 భాజకము లబ్ధమెంత?

$\frac{5}{0}$ ఖహార రాశి లబ్ధమగుచున్నది.

ఖహారరాశి అనంతమైనది అనగా లబ్ధము అనంతమగును. అని భాస్కరాచార్యులు బీజగణితమున దీనిగూర్చి యిట్లు చెప్పిరి.

అస్మిన్ వికారః ఖహరే న రాశావపి ప్రవిష్టేష్వపి నిఃసృతేషు

బహుష్వపి స్యాల్లయసృష్టికాలేऽనన్తేऽచ్యుతే భూతగణేషు యద్వత్ ॥

అనగా ప్రళయకాలమున సృష్టికాలమున సృజింపబడినను, లయింపబడినను అనంతుడగు అచ్యుతునకు మార్పుచెందనట్లు ఖహారరాశియందు ఇతరసంఖ్యలను కలిపినను తీసివేసినను మార్పుచెందదు. (అని శ్లో)

అనంతమునకు ∞ ఇది సంజ్ఞ (సంకేతము = గుర్తు) గా నున్నది.

ఉపపత్తి:—భాజకము భాజ్యముతో సమమగుచో లబ్ధము 1 అగుచున్నది. భాజకము భాజ్యముకంటె తక్కువయైనకొలదిని లబ్ధము అధికమగుచున్నది. కావున భాజకము శూన్యము అయినచో లబ్ధము అనంతమగుచున్నది.

ఎట్లనగా: $5\div 5 = 1$ ఇట్లు $5\div\frac{1}{2} = 10$ ఇట్లు $5\div\frac{1}{4} = 20$ ఇట్లు భాజకము ఎంతతగ్గిన లబ్ధమంత యధికమగుచున్నది. అందువలన భాజకము శూన్యమగుచో లబ్ధమనంతము. ఖహారరాశియందు ఇతరసంఖ్యలు కలిపినను తీసివేసినను మార్పులేదు. ఎట్లనగా $\frac{5}{0}+\frac{3}{1}$ ఇచ్చట సమచ్ఛేదముగ చేయవలయును. (72 వ్రి. చూ) $\frac{5\times 1}{0\times 1}+\frac{0\times 3}{0\times 1} = \frac{5}{0}+\frac{0}{0}$ అగుచున్నది.

ఇట్టి వ్యవకలనమునందును అగుచున్నది. కావున ఖహారరాశి మార్పు చెందదు.

[illegible] (79 [illegible]) [illegible]

[illegible]: $\frac{5}{0}+\frac{2}{3}=\frac{5\times3}{0\times3}\pm\frac{2\times0}{3\times0}=\frac{15}{0}\pm\frac{0}{0}=\frac{15}{0}$

[illegible] (70, 71 [illegible]) [illegible] 15[illegible]

[illegible] $5\div0+3-2\times0$ [illegible]

$\frac{5}{0}+3-2\times0$ [illegible] $5\times0+3-2\div0=\frac{5\times0+3-2}{0}$ [illegible]

[illegible]

$5+3-2=6$ [illegible]

(98 [illegible])

97. [illegible] $0\div5=0$

98. [illegible]

[illegible]: [illegible]4, [illegible]0, [illegible]

[illegible] $4\times0=0$ [illegible] $\therefore\frac{0}{0}=4$

[illegible] $0\times0=0$ $\therefore\frac{0}{0}=0$ [illegible]

[illegible] 10[illegible] [illegible]

[illegible]

99. [illegible]

$0^2=0,\ 0^3=0 \qquad \sqrt{0}=0 \qquad \sqrt[3]{0}=0$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 10 [illegible] ?

[illegible] 63 [illegible] ?

$$\frac{(\sqrt{5\times 3+1}+2)^2-9}{5} = \text{రాశి} \;\therefore\; \frac{(\sqrt{3\times 8+1}+2)^2-9}{5}$$

$$=\frac{(\sqrt{25}+2)^2-9}{5}=\frac{(5+2)^2-9}{5}=\frac{7^2-9}{5}=\frac{49-9}{5}=\frac{40}{5}$$

$= 8 =$ రాశి అగుచున్నది.

(2) [illegible] (75 [illegible]) [illegible]

(1) ఉదా:— [illegible] స్వ $\frac{3}{5}$ [illegible] 24 అగును [illegible] ?

రాశి + స్వ $\frac{3}{5} = 24$ అగునో [illegible] — స్వ $\frac{3}{5+3}$ = రాశి అగుచున్నది.

$\therefore\ 24 -$ స్వ $\frac{3}{5+3} = 24 -$ స్వ $\frac{3}{8} = \frac{24}{1}\times\frac{8-3}{8} = \frac{24\times 5}{8}$

$= 15$ ఇష్టరాశి

ఉపపత్తి: $15+9 = 24$ [illegible] 15 లో 9 [illegible] $\frac{3}{5}$ అగుచున్నది. [illegible] 15 లో 15 ను 5 చే [illegible] భాగములు 5 [illegible] 15 లో 15 — స్వ $\frac{5}{5}$ [illegible]

$\frac{15}{1}+$ స్వ $\frac{3}{5} = 15$ లో $\frac{5+3}{5} = 15$ లో $\frac{8}{5} = 24$ అగుచున్నది. [illegible] 24 [illegible] 15 లో 5 వ [illegible] 8 [illegible] అగుచున్నది. [illegible]

15 లో 5వ [illegible] 24 లో 8వ [illegible] అగుచున్నది [illegible] 15 లో $\frac{3}{5}$ — 24 లో $\frac{3}{5+3}$ కావున 24 లో స్వ $\frac{3}{5+3}$ [illegible] 15 [illegible].

[illegible] 24 లో స్వ $\frac{3}{8}$ = 15 లో $\frac{3}{8-3}$ కావున 15 లో స్వ $\frac{3}{8-3}$ [illegible] 24 అగుచున్నది. [illegible] ఇష్టసంఖ్య [illegible] అని స్పష్టమగుచున్నది.

(2) ఉదా: రాశి + స్వ $\frac{1}{2}\times 3 = 63$ [illegible]

[illegible] $63 \div 3 -$ స్వ $\frac{1}{2+1}$ = రాశి $= \frac{63}{3} -$ స్వ $\frac{1}{2+1}$

$=\frac{21}{1}\times\frac{2}{3} = 14$ కావున 14 ఇష్టరాశి యగుచున్నది.

[illegible] $\frac{14}{1}+$ స్వ $\frac{1}{2}\times 3 = \frac{14}{1}\times\frac{3}{2}\times 3 = 21\times 3 = 63$ అగుచున్నది.

అథోద్దేశకః

యస్త్రిఘ్నః త్రిభిరన్వితః స్వచరణైర్భక్తస్తతః సప్తభి
స్స్వత్ర్యంశేన వివర్జితః స్వగుణితో హీనో ద్విపంచాశతా।
తన్మూలేఽష్టయుతే హృతేఽపి దశభిర్జాతం ద్వయం బ్రూహి తం
రాశిం వేత్సి హి చంచలాక్షి విమలాం బాలే విలోమక్రియాం॥ [illegible]॥

న్యాసః. గుణః 3, క్షేపః $\frac{3}{4}$, భాజకః 7, ఋణాంశః $\frac{1}{3}$, వర్గః, ఋణం 52, మూలమ్, క్షేపః 8, హరః 10, దృశ్యం 2, ఉక్తోక్త కరణేన జాతో రాశిః [illegible]

ఇతి స్వాంశవిధిః

తా॥ సీదంచలూఛీ! బాలా! విత్రవత్కృని వ్యస్తవిధి నెరుంగుదువేని చెరాశిని 3 చే గుణించి అందు స్వ $\frac{3}{4}$ కలిపి 7 చే భాగించి దానియందు స్వ $\frac{1}{3}$ తీసివేసి దానిని వర్గించి దానివలన 52ను వ్యవకలించి దానిమూలమునకు 8 కలిపి 10 చే భాగింప 2 లబ్ధము వచ్చుచున్నదో ఆ రాశిని చెప్పుము.

ఇచట గుణకము 3, ధన స్వ $\frac{3}{4}$, భాజకము 7, ఋణ స్వ $\frac{1}{3}$, వర్గ, ఋణము 52, మూల, ధనము 8, భాజకము 10, దృశ్యము 2, ఇందలి రాశి యెంత? అని ప్రశ్నము. కావున

$$\sqrt{\{(రా \times 3 + స్వ\tfrac{3}{4}) \div 7 - స్వ\tfrac{1}{3}\}^2 - 52} + 8 \div 10 = 2$$

దీనికి విలోమించగా

$$\sqrt{(2 \times 10 - 8)^2 + 52} + స్వ\tfrac{1}{2} \times 7 - స్వ\tfrac{3}{7} \div 3 =$$

$$\sqrt{144 + 52} + స్వ\tfrac{1}{2} \times 7 - స్వ\tfrac{3}{7} \div 3$$

$= \frac{14}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{7}{1} \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = 14 \times 2 = 28$ ఇది అభీష్టరాశి యగుచున్నది.

వ్యాఖ్యానముబట్టి ప్రాంజీవాములయందు విలోమపద్ధతి యుపయోగించబడినది.

ఇది వ్యస్తవిధి ప్రకరణము.

---

6 ప్రకరణము. ఇష్టకర్మ.

అథ ఇష్టకర్మణి కరణసూత్రం వృత్తమ్

ఉద్దేశకాలాపవదిష్టరాశిః క్షుణ్ణో హృతోంశై రహితో యుతో వా ।
ఇష్టాహతం దృష్టమనేన భక్తం రాశిర్భవేత్ప్రోక్తమితీష్టకర్మ ॥ 50 ॥

టీ॥ ఇష్టరాశిః = అభీష్టసంఖ్య, ఉద్దేశకాలాపవత్ = ప్రశ్నించబడిన వాక్యమునుసరించి, క్షుణ్ణః = గుణింపబడినదిగాని, హృతః — భాగింపబడినదిగాని, అంశైః = భాగములచే, రహితః = తీసివేయబడినదిగాని, యుతోవా — కలుపబడినదిగాని (చేయబడినది) ఇష్టాహతం = ఇష్టసంఖ్యచే గుణింపబడిన, దృష్టం = దృష్టసంఖ్య, అనేన = ప్రశ్నించబడిన వాక్యమునుసరించి చేయగా వచ్చిన సంఖ్యచే, భక్తం = భాగింపబడినది, రాశిః = రాశి, భవేత్ = అగును. ఇతి ఇష్టకర్మప్రోక్తం = ఇట్లు ఇష్టకర్మ చెప్పబడినది.

101. వ్యా. ప్రశ్నించబడిన ప్రశ్నయందలి ఇష్టసంఖ్యయందు సంకల్పిత వ్యవకలనముగా గుణహారాదికములచేసి దానిచే ప్రశ్నకు ఉత్తరమునుచెప్పుట ఇష్టకర్మ. ఏకారాశిగా నొకటి గుణించుట, భాగించుట, కలుపుట, తీసివేయుట మొదలగు క్రియలు చేయుటచే మనకు సిద్ధించినసంఖ్యయందు ఆయాకారరాశి తెలుసుకొనవలసినచో ఒక ఇష్టసంఖ్యను కల్పించి దానియందు ప్రశ్నోక్తప్రకారము గుణహారాదిక్రియలు చేయవలెను. అట్లుచేయగా వచ్చిన సిద్ధించినసంఖ్యచే దృష్టసంఖ్యను ఇష్టాంకముచే గుణించి భాగింపవలెను. లబ్ధము ఆయాకారరాశియగును. ఈపద్ధతి ఉదాహరణమునందు స్పష్టముగాగలదు.

అత్రోద్దేశకః

పంచఘ్నః స్వత్రిభాగోనో దశభక్తః సమన్వితః ।
రాశిత్ర్యంశార్ధపాదైః స్యాత్ కో రాశిర్ద్వ్యూనసప్తతిః ॥ 51 ॥

న్యాసః, గుణః 5, ఊనః $\frac{1}{3}$, హరః 10 రాశ్యంశాః $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, దృశ్యం 68 అత్ర కల్పితరాశిః 3 పంచఘ్నః 15 స్వత్రిభాగోనః 10 దశభక్తః 1 కల్పితరాశే 3 ర్త్ర్యంశార్ధపాదైః $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, సమన్వితః జాతో $\frac{17}{4}$ అథ దృష్టం 68 ఇష్టేన 3 గుణితం 204 హృతేన $\frac{17}{4}$ భక్తం జాతో రాశిః 48

తా॥ $రా \times 5 - స్వ\frac{1}{3} \div 10 + \frac{రా}{3} + \frac{రా}{2} + \frac{రా}{4} = 68$, రాశియెంత?

రా = రాశి ఇచట రాశియొక్కమానమును తెలియక ఇష్టసంఖ్యగ 3 ను కల్పించి అందు ప్రశ్నోక్తప్రకారముగ గణితముచేయగా $3 \times 5 - స్వ\frac{1}{3} \div 10 + \frac{3}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4}$ $= \frac{15}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4}$ $= \frac{4+4+6+3}{4} = \frac{17}{4}$ అగుచున్నది. ఇపుడు దృశ్యరాశి 68 ని ఇష్టము 3 చే గుణించి $\frac{17}{4}$ చే భాగింపగా రాశియగును.

$$\therefore 68 \times 3 \div \frac{17}{4} = \frac{68 \times 3 \times 4}{17} = 4 \times 3 \times 4 = 48 \text{ రాశి.}$$

సరిచూచుట:— రాశి 48 గావున 48 × 5 = 240 ఇందు వ్యస్త $\frac{1}{3}$ ను తీసివేయగ 160 దీనిని 10 చే భాగించగ 16 ఇందు రాశిత్రయాంశము 16 అర్ధము 24 వానిని కలిపిన 12 కలిపి 68 అగుచున్నది.

ఇట్లు 1 ని ఇష్టాంకముగా గొనిన

$1 \times 5 =$ వ్యస్త $\frac{1}{3} \div 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4+4+6+3}{12} = \frac{17}{12}$ దీనిచే దృశ్యమును ఇష్టముచే

గుణించి భాగించ $\frac{68}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{12}{17} = 48$ రాశి.

ఇట్లు ఏ ఇష్టాంకము కల్పించినను రాశియొకటే యగుచున్నది.

ఉపపత్తి:— ఒక సంఖ్యను [illegible] అందలి మూడవవంతును తీసివేయగా 12 మిగిలినది. ఆ సంఖ్య యెంత? [illegible] మూడవవంతును తీసివే యగా [illegible] 2 మూడవవంతులు [illegible] 12 అగుచున్నది [illegible] రాశిలో $\frac{2}{3}$ = 12 అగును [illegible] 12 అగుటచే 1 వంతు [illegible] తెలియుచున్నది. దీనిచే రాశిమానము 18 అని చెప్పవలయును. ఇందు రాశి = 1 అనుకొని సాధించితిమి.

ఇట్లు రాశి = 3 అనుకొందమో $\frac{2}{3}$ — వ్యస్త $\frac{1}{3}$ = $\frac{2}{3}$ అగుచున్నది. ఇప్పుడు $\frac{2}{3}$ = 12 అగును. ఇట్లు రాశి = 6 అనుకొనిన ... ... $\frac{4}{6}$ = 12 అగును. దీనిబట్టి ఇష్టసంఖ్య వ్యస్తానుసారము లెక్కించి [illegible] చేయగా వచ్చిన శిష్టసంఖ్యలను [illegible] తెలియుచున్నది. ఇట్లు ఒక రాశినిబట్టి మరియొక రాశి వృత్తిగ [illegible] అనుపాతము చేయవలసియున్నది (త్రైరాశికము) కావున రాశి 1 నే అనుకొనిన వ్యస్తసంఖ్య $\frac{2}{3}$ ఇది దృశ్యము 12 తో సమానమగునా 1 ని గొందుము?

ఇట్లు 3 ఇష్టమగునా $\frac{2}{3}$ ఇది దృశ్యము 12 తో సమానమగునో 3 గొంత రాశి యెంత? ఇట్లు త్రైరాశికముచే పైనిచూపబడిన విషయము స్పష్టమగుచున్నది. ఎట్లనగా

ఇష్టసంఖ్యయును, ఇష్టసంఖ్యాసంబంధి దృష్టమును వరుసగా సంబంధములు రాశియొక్క దృష్టసంఖ్యయును అగుటచే త్రైరాశిక (అనుపాత)ము చేయుదురు. ఎట్లనగా:—

ఇ : ఇ దృ : : రా : దృ $\therefore \frac{\text{ఇ}}{\text{ఇ దృ}} = \frac{\text{రా}}{\text{దృ}} \therefore \text{రా} = \frac{\text{ఇ} \times \text{దృ}}{\text{ఇ దృ}}$

ఉద్దేశకాలాపవదిష్టరాశిః క్షుణ్ణో హృతోంశై రహితో యుతో వా ।
ఇష్టాహతం దృష్టమనేన భక్తం రాశిర్భవేత్ప్రోక్తమితీష్టకర్మ ॥

ఇట్లు అన్ని ఉదాహరణములందును గానబడు [illegible] సంఖ్యచే గుణించబడినదైనను భాగించబడినదైనను లేక రాశ్యంశములచే తీసివేయబడినదైనను కలుపబడినదైనను దృష్టసంఖ్యగనున్నచో అవిటువిష్టరాశి కల్పించి దానియందు దృశ్య [illegible] గణితమును చేయగా తుదయందు ఏసంఖ్యలు గలుగుచున్నవో ఆసంఖ్యచే దృష్టసంఖ్యను ఇష్టాంకముచే గుణించిభాగించినచో లబ్ధము రాశి యగును.

ఉదాహరణమ్.

అమలకమలరాశేః త్ర్యంశపంచాంశషష్ఠైః త్రినయనహరిసూర్యా యేన తుర్యేణ చార్యా ।
గురుపదమథ షడ్భిః పూజితం శేషపద్మైః సకలకమలసంఖ్యాం క్షిప్రమాఖ్యాహి తస్య ॥

న్యాసః $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ దృశ్యమ్ 6. ఇష్టమేకం రాశింప్రకల్ప్య ప్రాగ్వజ్జాతో రాశిః 120

తా॥ ఒకడు ఒక తామరపూవులరాశి యొక్క 3 వ వంతుచే శివుని, 5 వ వంతుచే విష్ణువుని, 6 వ వంతుచే సూర్యుని పూజించెను, 4 వ వంతుచే పార్వతిని పూజించెను, మిగిలిన 6 పూవులచే గురుపాదములను పూజించెను. ఆ పూవుల సంఖ్య యెంత?

[illegible] 1 [illegible]

$$\frac{1}{1} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1} - \left(\frac{20+12+10+15}{60}\right)$$

$$= \frac{60}{60} - \frac{57}{60} = \frac{3}{60}$$ శేషము.

6 [illegible] 1 [illegible] $\therefore \frac{6}{1} \times \frac{1}{1} \div \frac{3}{60} = \frac{6}{1} \times \frac{60}{3} = 120$ [illegible]

[illegible] 3 [illegible] 40, 5 [illegible] 24, 6 [illegible] 20, 4 [illegible] 30 [illegible] $11\frac{1}{2}$ [illegible]

[illegible] 120 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 63 [illegible]

[illegible]

(1) [illegible] 1 [illegible]

$\therefore 63 \times 1 \div \frac{7}{60} = \frac{63 \times 60}{7} = 540$ [illegible]

(2) [illegible] (75 [illegible]) [illegible]

[illegible] 63 × [illegible] = 540 [illegible] 1 [illegible]

(3) [illegible]

[illegible]

[illegible] 1 [illegible]

$$\frac{1}{1} - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1} - \left(\frac{20+12+10+15}{60}\right)$$

$$= \frac{60}{60} - \frac{57}{60} = \frac{3}{60}$$ శేషము.

[illegible] 1 [illegible] $\therefore \frac{6}{1} \times \frac{1}{1} \div \frac{3}{60} = \frac{6}{1} \times \frac{60}{3} = 120$ [illegible]

[illegible] 3 [illegible] 40, 5 [illegible] 24, 6 [illegible] 20. 4 [illegible] 30 [illegible] 114 [illegible]

[illegible] $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{57}{60}$ [illegible] 6 [illegible] (120 [illegible]) [illegible] 6 [illegible] $\times$ [illegible] $= 120$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 63 [illegible] ?

[illegible]

(1) [illegible] 1 [illegible]

$\therefore 63 \times 1 \div \frac{7}{60} = \frac{63 \times 60}{7} = 540$ [illegible]

(2) [illegible] (75 [illegible]) [illegible]

[illegible] $= \frac{7}{60}$ [illegible] 63×60 [illegible] $= 540$ [illegible] 1 [illegible]

(3) [illegible]

[illegible]

[illegible] (3 — 1) × (9 — 2) × (4 — 1) × (10 — 6) = 1 × 7 × 3 × 4 [illegible] 2 × 9 × 4 × 10 [illegible] $\frac{1 \times 7 \times 3 \times 4}{2 \times 9 \times 4 \times 10} = \frac{7}{60}$ [illegible]

[illegible] $\frac{63}{1} \div \frac{7}{60} = 63 \times \frac{60}{7} = 9 \times 60 = 540$ [illegible].

(4) [illegible] (100 [illegible]) [illegible] $\times$ [illegible] $= 9 \times 10 \times 6 \times 3 = 540$ [illegible].

[illegible]

[illegible] 1 [illegible] $\times 3 =$ [illegible]

[illegible] $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{3+5+6}{15} = \frac{14}{15}$ ∴ $\frac{1}{1} - \frac{14}{15} = 1 = \frac{1}{15}$

[illegible] $1 \times 1 \div \frac{1}{15} = 15$ [illegible].

[illegible] 15 [illegible], 5 [illegible] 3, [illegible] 14, [illegible] 1, [illegible].

102. [illegible] (1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

(5) [illegible]

---

* [illegible]

(1) ఉదా: — బీజగణితమందు భాస్కరాచార్యుల యుదాహరణము.

ఒకనివద్ద 6 గుఱ్ఱములును వ 300 లును గలవు. రెండవవానివద్ద 10 గుఱ్ఱములు గలవు వానికి వ 100 ల ఋణముండెను. గుఱ్ఱములవెల సమానము వారిద్దఱివద్దను ఆస్తిసమాన మగుచున్నది. గుఱ్ఱము వెల యెంత ?

మొదటియిష్టసంఖ్య 10 రెండవ ఇష్టసంఖ్య 20 కల్పింపబడెను. ఈయిష్టసంఖ్య అశ్వమూల్యముగా కల్పింపబడినది. గావున మొదటియిష్టసంఖ్యచే మొదటి వానిధనము 6 × 10 + 300 ఇట్లు రెండవవానిధనము 10 × 10 — 100 అగుచున్నది. ఈరెండుధనములయొక్క యంతరము (1) 360 — 0 = + 360 ఇట్లు రెండవఇష్టసంఖ్యచే మొదటివానిధనము 6 × 20 + 300 = 120 + 300 = 420 రెండవవానిధనము 10 × 20 — 100 = 200 — 100 = 100. ఈ రెండు ధనములయొక్క యంతరము (2) 420 — 100 = + 320 ఇచట (1) ఇష్టము 10 (2) ఇష్టము 20 కావున $\frac{360 \times 20 - 320 \times 10}{360 - 320} = \frac{7200 - 3200}{40}$

$= \frac{400}{4} = 100$ ఇది అశ్వమూల్యము అగుచున్నది. కావున మొదటివానిధనము 6 × 100 + 300 = 900, రెండవవానిధనము 10 × 100 — 100 = 900 అగుచున్నది.

(2) ఉదా: — పైప్రశ్నయందే మొదటి అశ్వములను ధనఋణములను గలవు. అశ్వమూల్యము సమానమైకొని మొదటివానిధనమును సగము చేసి అందు 2 ను కలుపుకొంటిమనుకో అంతే రెండవవాని ధనమగుచున్నది. అప్పుడశ్వమూల్య మెంత ? (1) ఇష్టము 50 (2) ఇష్టము 60 ప్రశ్నానుసారము మొదటియిష్టముచే మొదటివానిధనము 600 అగునో (1) రెండవవానిధనము 302 అగుచున్నది. అట్లే రెండవదానియందు మొదటియిష్టముచే (2) 50 × 10 — 100 = 400 అగుచున్నది. రెండిటియొక్క యంతరము (1) అంతరము — 98 ఈఅంతరము ఋణము.

ఇట్లు రెండవఇష్టము 60 చే మొదటివానిధనము 780 దీనినుండి (1) రెండవవానిధనము 392 అట్లు (2) రెండవవానిధనము 700 రెండిటియొక్క యంతరము (2) అంతరము 392 — 700 = — 308 ఇదియును ఋణమగుచున్నది.

$$\therefore \frac{308 \times 50 - 60 \times 98}{308 - 98} = \frac{15400 - 5840}{210} = \frac{7560}{21}$$ = ఇదిఅశ్వమూల్యము.

(3) ఉదా: — ఇద్దరు ధనికులుగలరు. రెండవవాడు వ 100 లను మొదటివానికిచ్చినచో అప్పుడు మొదటివానివద్ద రెండవవానిధనముకన్న రెట్టింపుధనముండును. లేక మొదటివాడు వ 10 లను రెండవవానికిచ్చినచో రెండవవానివద్ద మొదటివానిధనముకన్న 6 రెట్లుండును. వారిద్దఱివద్దనున్న ధనమెంత ?

ఇచట ఎట్లైననో ప్రశ్నయొక్క ఒకభాగము సరిపడునట్లు రెండు ఇష్టసంఖ్యలను ఇద్దరిధనములుగను కల్పింపవలయును. కావున మొదటివాని ధనము 60. రెండవవానిధనము 180 కల్పింపబడెను. ఇచట రెండవవానిధనములోని 100 లను మొదటివానికిచ్చినచో అప్పుడు మొదటివానిధనము రెట్టింపగును. ఇట్లు మొదటిప్రశ్నభాగము సరిపడుచున్నది. రెండవప్రశ్నభాగమునందు మొదటివానిధనము 60 నుండి 10 తీసివేయ 50 దీనిని 6 చే గుణింప 300 ఇది రెండవవానిధనము 180 లో 10 ని కలుప 190 కి సరిపడుటలేదు. కావున ఈరెండుధనములయొక్క యంతరము (1) అంతరము 300 — 190 = 110 అగుచున్నది. ఇట్లు తిరుగ రెండుఇష్టసంఖ్యలు (1) 20 (2) 160 కల్పింపబడినవి. ఇందును మొదటిప్రశ్నభాగము సరిపడుచున్నది. ఇందును రెండవప్రశ్నభాగమునందు మొదటివానిధనము 20 నుండి 10 ని తీసివేసి 6 చే గుణింప 60 అగుచున్నది. ఇది రెండవవానిధనము 160లో 10 ని కలుప 170 తో సరిపడుటలేదు. కావున ఈరెండుధనములయొక్క యంతరము (2) అంతరము 60 — 170 = — 110 ఇది ఋణమగుచున్నది. ఇందు (1) ఇష్టము 60 (2) ఇష్టము 20 (1) అంతరము + 110 (2) అంతరము — 110.

$$\therefore \frac{110 \times 60 + 110 \times 20}{110 + 110} = \frac{8800}{220} = 40$$ మొదటివానిధనము.

దీనినుండి రెండవవానిధనము 170 అగుచున్నది.

ఈపద్ధతియొక్క ఉపపత్తి బీజప్రక్రియచే (1 ఉదా. చూ.)

6 × యా + 300 = 10 × యా — 100 ఇందు యా = అశ్వమూల్యము. కల్పనచే క × యా + ర = గ × యా — వ

∴ క × యా + ర — (గ × యా — వ) = 0

= (క — గ) యా + ర + వ = 0

ఇచట తెలియవలసినది (అవ్యక్తము) యావత్తావత్తు. కావున రెండు ఇష్ట సంఖ్యలను తెలుపుటకై యావత్తావత్తుగ కల్పించి నాటిలోని [illegible] రెండు తుల్యపక్షముల సాధించు ప్రకారములచే యావత్తావత్తు తెలియఁగవలెను. మొదటి ఇష్టము = ఇ. రెండవయిష్టము = ఇ (దీనిని ప్రత్యేకించిన ఇష్టమని తెలియవలెను) యావత్తావత్తు చేసిన పక్షములను ఇష్టము చేసిన పక్షముల అంతరము = అం, ఇట్లు రెండవ ఇష్టము చేసిన అంతరము = అం అనుకొనుము.

ఇప్పుడు అవ్యక్తము 'యా' అనునో (7) పక్షము (క — గ) యా — ర + వ = 0

,, ఇ అనునో (2) పక్షము (క — గ) ఇ — ర + వ = శే

ఈ రెండుపక్షముల అంతరము, (క — గ) ఇ — (క — గ) యా = అం

ఇట్లు రెండవయిష్టము 'ఇ' చే (2) పక్షము (క — గ) ఇ + ర + వ = శే ఈ పక్షము

[illegible] (1) పక్షమునకును అంతరము, (క — గ) ఇ — (క — గ)

యా = అం ఇప్పుడు రెండులంతరముల భాగాహారము చేయగా

$$అం \div అం = \{(క — గ) ఇ — (క — గ) యా\} \div \{(క — గ) ఇ — (క — గ) యా\}$$

$$\therefore అం \div అం = (క — గ)(ఇ — యా) \div (క — గ)(ఇ — యా)$$

$$\therefore \frac{అం}{అం} = \frac{(క — గ)(ఇ — యా)}{(క — గ)(ఇ — యా)}$$ సమచ్ఛేదముగా చేయగా

$$\frac{అం \times (క — గ) \times (ఇ — యా)}{అం \times (క — గ) \times (ఇ — యా)} = \frac{అం \times (క — గ) \times (ఇ — యా)}{అం \times (క — గ) \times (ఇ — యా)}$$

$$\therefore అం \times (క — గ) \times (ఇ — యా) = అం \times (క — గ) \times (ఇ — యా)$$ కావున

$$అం \times (ఇ — యా) = అం \times (ఇ — యా) = అం \times ఇ — అం \times యా$$

— అం × ఇ — అం × యా = అం × ఇ — అం × యా సమశోధనాదికముచే

$$అం \times యా — అం \times యా = అం \times ఇ — అం \times ఇ$$

$$\therefore యా = \frac{అం \times ఇ — అం \times ఇ}{అం — అం}$$ అగుచున్నది.

ఇచట పక్షాంతరము ప్రథమ ద్వితీయాంతరము [illegible] అనునో [illegible] 'సంశోధ్యమాన స్వాంశ [illegible]' ఇత్యాది రీతిగా [illegible] ఫలములను అంతరములను యోగము చేయవలయును. ఇట్లు [illegible] ఉపపన్నమగుచున్నది.

ఇది 6 ప్రకరణము సమాప్తము.

---

7 వ ప్రకరణము.

సంక్రమణము.

సంక్రమణసూత్రం వృత్తార్ధమ్

యోగోంతరేణోనయుతోర్ధితస్తౌ రాశీస్మృతౌ సంక్రమణాఖ్యమేతత్

టీ॥ యోగః = [illegible], అంతరేణ = [illegible], [illegible], అర్ధితః = [illegible], తౌ = [illegible], రాశీ = [illegible], ఏతత్ సంక్రమణాఖ్యం స్మృతం॥ ఇది సంక్రమణమని చెప్పఁబడెను.

108. ప్ర. రెండురాసులయొక్క యోగమున్ను అంతరమున్ను తెలిసియుండి [illegible] అంతరమును కలుపుము, మరియొకచో యోగమునుండి అంతరమును వ్యవకలించుము. ఈరెంటిని వేర్వేర 2 చే భాగించుము. [illegible] రాసులగుచున్నవి. (ఇది సంక్రమణమని చెప్పఁబడును.)

అత్రోద్దేశకః

యయోర్యోగః శతం సైకం వియోగః పంచవింశతిః।

తౌ రాశీ వద మే వత్స వేత్సి సంక్రమణం యది॥ ౧౫॥

న్యాసః. యోగః ౧౦౧ అంతరం ౨౫ జాతౌ రాశీ ౬౩, ౩౮.

బాల వత్సా! ఏవి సంక్రమణము చెయ్యగా రెండు సంఖ్యల యోగము 101 అంతరము 25 అగునో ఆ సంఖ్యలెవ్వి? చెప్పుము.

సంక్రమణప్రకారము $\frac{101+25}{2} = 63$, $\frac{101-25}{2} = 38$

(1) 63 (2) 38 రాసులు అగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: $\text{యా} = $ పెద్దరాశి $\text{కా} = $ చిన్నరాశి

$\text{యా} + \text{కా} = $ యోగ $\text{యా} - \text{కా} = $ అంతర అనుకొందము.

$\text{యోగ} + \text{అంతర} = (\text{యా} + \text{కా}) + (\text{యా} - \text{కా}) = 2\,\text{యా}$

$\text{యోగ} - \text{అంతర} = (\text{యా} + \text{కా}) - (\text{యా} - \text{కా}) = 2\,\text{కా}$

$$\therefore \frac{(\text{యా}+\text{కా}) + (\text{యా}-\text{కా})}{2} = \frac{\text{యో} + \text{అం}}{2} = \text{యా}$$

$$\frac{(\text{యా}+\text{కా}) - (\text{యా}-\text{కా})}{2} = \frac{\text{యో} - \text{అం}}{2} = \text{కా}$$

వర్గసంక్రమణే కరణసూత్రం వృత్తార్ధం

వర్గాంతరం రాశివియోగభక్తం యోగస్తతః ప్రోక్తవదేవ రాశీ॥ ౩౨॥

టీ॥ వర్గాంతరం = వర్గాంతరము, రాశివియోగభక్తం = రాశ్యంతరముచే భాగింపబడినదై, యోగః = రాశియోగము (అగును) తతః = పిమ్మట, ప్రోక్తవదేవ = చెప్పబడినట్లుగానే, రాశీ = రాసులు (సాధింపవలెను).

104. వ. రెండు రాసులయొక్క వర్గాంతరము రాశ్యంతరము తెలిసినప్పుడు వర్గాంతరమును రాశ్యంతరముచే భాగింప రాశియోగమగును. రాశియోగ రాశ్యంతరములచే (103 వ.) రాసులు తెలియబడును.

అత్రోద్దేశకః

రాశ్యోర్యయోర్వియోగోஉష్టౌ తత్కృత్యోశ్చ వియుక్ చతుశ్శతీ।

వివరం వద తౌ రాశీ క్షిప్రం గణితకోవిద॥ ౨౦॥

వ్యా॥ రాశ్యంతరం ౮ కృత్యంతరం ౪౦౦ జాతౌ రాశీ ౨౧, ౨౯

రెండు రాసుల అంతరము 8 వాని వర్గాంతరము 400 ఓ గణితవిద్వాంసుడా! శీఘ్రముగ ఆ రాసులను చెప్పుము.

ఉదా:— వర్గాంతరం 400 రాశ్యంతరం 8

వర్గాంతరము $400 \div 8 = 50$ రాశియోగము

పిమ్మట (103 వ.) $\frac{50+8}{2} = 29$ ఇట్లు $\frac{50-8}{2} = 21$ రాసులైనవి.

ఉపపత్తి:— యా, కా రెండు రాసులన్నచో

$(\text{యా} + \text{కా}) \times (\text{యా} - \text{కా}) = \text{యా}^2 - \text{కా}^2$ అగుచున్నది

$$\therefore \frac{\text{యా}^2 - \text{కా}^2}{\text{యా} - \text{కా}} = \text{యా} + \text{కా} \text{ ఇట్లు } \frac{\text{యా}^2 - \text{కా}^2}{\text{యా} + \text{కా}} = \text{యా} - \text{కా}$$

(1) అను:— కావున వర్గాంతరమును రాశియోగముచే భాగించిన రాశ్యంతర మగును. ఇదియే వర్గాంతరమును రాశ్యంతరముచే భాగించిన రాశియోగమగును. ఇట్లు లీలావతియందు ఆ రెండు సిద్ధాంతములు చెప్పబడినవి. అవి కొన్ని యందు లేకుండుచున్నవి.

105. వ. వర్గయోగమును రాశియోగమును తెలిసినచో వర్గయోగమును 2 చే గుణించి దానిలో యోగవర్గమును వ్యవకలింపుము. శేషము రాశ్యంతర వర్గమగును. దాని మూలము రాశ్యంతరము (103 వ.) రాశియోగ రాశ్యంతరములచే రాసులు తెలియబడును.

ఉదా:— వర్గయోగము 58 రాశియోగము 10 రాసులెవ్వి?

$58 \times 2 - 10^2 = 116 - 100 = 16$ దీని మూలము $\sqrt{16} = 4$ రాశ్యంతరము. కావున 7, 3 రాసులగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: యా, కా రెండు రాసులు. $(\text{యా}+\text{కా})$, $(\text{యా}^2+\text{కా}^2)$ తెలిసిన విధము. $(\text{యా}+\text{కా})^2 = \text{యా}^2 + \text{కా}^2 + 2\,\text{యా}\,\text{కా}$ కావున

$(\text{యా}+\text{కా})^2 - (\text{యా}^2+\text{కా}^2) = 2\,\text{యా}\,\text{కా}$ ఇట్లు $\text{యా}^2 + \text{కా}^2 - 2\,\text{యా}\,\text{కా} = (\text{యా}-\text{కా})^2$

$\therefore (\text{యా}-\text{కా})^2 = \text{యా}^2 + \text{కా}^2 - \{(\text{యా}+\text{కా})^2 - (\text{యా}^2+\text{కా}^2)\}$ కొట్టివేయగా $\therefore (\text{యా}-\text{కా})^2 = \text{యా}^2 + \text{కా}^2 + \text{యా}^2 + \text{కా}^2 - (\text{యా}+\text{కా})^2$

$= (\text{యా}^2 + \text{కా}^2)\,2 - (\text{యా} + \text{కా})^2$ ఇట్లు ఏర్పడుచున్నది.

దానివల్లనే $2(\text{యా}^2+\text{క}^2)=(\text{యా}+\text{క})^2+(\text{యా}-\text{క})^2$ అని తెలియుచున్నది.

(1) అను:— కావున ద్విగుణితవర్గయోగమునుండి అంతరవర్గమును వ్యవకలించగా యోగవర్గమగును. దానియొక్క మూలము యోగము కావున రాశివర్గయోగ రాశ్యంతరములవలన రాశియోగమును తెలిసికొని రాసులు తెలియంగవచ్చును.

ఉదా: రాశివర్గయోగము 58 రాశ్యంతరము 4

$58\times 2-4^2=116-16=100$ రాశియోగవర్గము, దీనిమూలము 10 రాశియోగము. దానిచే 7, 3 రాసులు.

106. ప్ర. రాశిగుణనఫలము వర్గయోగము తెలిసినచో

వర్గయోగమునుండి ద్విగుణితరాశిగుణనమును తీసివేయుము. శేషము రాశ్యంతరవర్గమగును, పిమ్మట (105 ప్ర అను) రాశియోగమువలన రాసులు తెలియును.

ఉదా: రాశివర్గయోగము 58 రాశిగుణనము 21 రాసులెవ్వి ?

$58-(21\times 2)=58-42=16$ రాశ్యంతరవర్గము. దీనిని ద్విగుణ వర్గయోగము $58\times 2=116$ వలన తీసివేయగా 100 రాశియోగవర్గము. (105 ప్ర అను చూ)

ఉపపత్తి: యా, క రెండురాసులు.

$(\text{యా}-\text{క})^2=\text{యా}^2+\text{క}^2-2\,\text{యా}\,\text{క}$ ఇందు స్పష్టమగుచున్నది.

107. ప్ర. వర్గయోగము వర్గాంతరము తెలిసినచో సంక్రమణసూత్రప్రకారము (103 ప్ర) చేసినచో వర్గములగును. వాటిమూలములు రాసులగును.

ఉదా:— వర్గయోగము 106 వర్గాంతరము 56 రాసులెవ్వి ?

$\frac{106+56}{2}=81$ ఇట్లు $\frac{106-56}{2}=25$ వీటిమూలములు 9, 5

ఉపపత్తి: వర్గయోగమును రాశియోగముగను వర్గాంతరమును రాశ్యంతరముగను భావించి (103 ప్ర) ప్రకారము చేసినచో వర్గములు రాగలవు. దానిచే స్పష్టమగును.

$(\text{యా}^2+\text{క}^2)+(\text{యా}^2-\text{క}^2)=2\,\text{యా}^2$ ఇట్లు $(\text{యా}^2+\text{క}^2)-(\text{యా}^2-\text{క}^2)=2\,\text{క}^2$

108. ప్ర. రాశిద్వయయోగము రాశిద్వయగుణనము తెలిసినచో

రాశిగుణనమును 4 చే గుణించి యోగవర్గమువలన వ్యవకలించిన రాశ్యంతరవర్గమగును

ఉదా: రాశియోగము 14 రాశిగుణనము 45

$14^2-45\times 4=196-180=16$ రాశ్యంతరవర్గము. మూలము 4 రాశ్యంతరము.

ఉపపత్తి: $(\text{యా}+\text{క})^2-(\text{యా}-\text{క})^2$
$=(\text{యా}^2+\text{క}^2+2\,\text{యా}\,\text{క})-(\text{యా}^2+\text{క}^2-2\,\text{యా}\,\text{క})=4\,\text{యా}\,\text{క}$
$\therefore (\text{యా}+\text{క})^2-4\,\text{యా}\,\text{క}=(\text{యా}-\text{క})^2$ అగుచున్నది.

(1) అను: $(\text{యా}+\text{క})^2=(\text{యా}-\text{క})^2+4\,\text{యా}\,\text{క}$ కావున రాశ్యంతరవర్గమునందు చతుర్గుణరాశిఘాతము కలిపినచో రాశియోగవర్గము అగునని తెలియుచున్నది.

(2) అను. వర్గయోగము, రాశిఘాతము, తెలిసినచో $\text{యా}^2\times\text{క}^2=(\text{యా}\times\text{క})^2$ కావున వర్గయోగమును రాశియోగముగను రాశిఘాతవర్గమును రాశిఘాతముగను భావించి ఈపద్ధతిచే చేసినచో రాశివర్గములగును, వాటిమూలములు రాసులు.

(3) అను. వర్గాంతరము రాశిఘాతము తెలిసినచో వర్గాంతరమును రాశ్యంతరముగను రాశిఘాతవర్గమును రాశిఘాతముగను భావించి (1 అను చే) చేయవలెను. రాశివర్గములగును.

109. ప్ర. (1) రెండురాసులఘనాంతరమున్ను రాశ్యంతరమున్ను తెలిసినచో ఘనాంతరమును రాశ్యంతరముచే భాగించి అందు రాశ్యంతరవర్గమును వ్యవకలించి దానిని 3 చే భాగించిన రాశిఘాతమగును (108 ప్ర 1 అను)చే రాశియోగము తెలిసికొని రాసులు తెలియగును.

ఉదా:— రాశ్యంతరం 2 ఘనాంతరం 98 రాసులెవ్వి.

$98\div 2-2^2\div 3=45\div 3=15$ ఇది రాశిఘాతము. (108 ప్ర 1 అను చే) చతుర్గుణరాశిఘాతము $15\times 4=60$ దీనిని రాశ్యంతరవర్గము 4 ను కలుపగా 64 రాశియోగవర్గము. దీనిమూలము 8 రాశియోగము ఇందువలన 5, 3 రాసులు. మూలగ్రంథము.

"ఘనాంతరం రాశివియోగభక్తం వియోగకృత్యా రహితం త్రిభక్తం।
చతుర్గుణం రాశివియోగకృత్యా యుక్తం పదం యోగమితి ప్రతీహి॥"

ఉపపత్తి: $య^3 - క^3$, $య - క$ తెలిసినవి.

సూత్రమునకు భాగహారముచే $య^3 - క^3 = (య - క) \times (య^2 + క^2 + యక)$

ఈ రెండుపక్షములను $(య - క)$ చే భాగింప $\frac{య^3 - క^3}{య - క} = య^2 + క^2 + యక$

ఈ రెండుపక్షములనుండియు రాశ్యంతరవర్గము $(య - క)^2$ ను వ్యవకలించిన

$\frac{య^3 - క^3}{య - క} - (య - క)^2 = 3యక$ దీని 3 చే భాగింప రాశిఘాతము

వచ్చునని యనుట స్పష్టము.

(2) $$\text{రాశ్యంతర}\ \frac{\frac{య^3 - క^3}{య - క} - (య - క)^2}{3} = యక$$ దీనియందు (108 ప్ర 2 అను చే)

$$\frac{4}{3}\left\{\frac{(య^3 - క^3)}{య - క} - (య - క)^2\right\} + (య - క)^2 = 4యక + (య - క)^2$$

$$= (య + క)^2 = \frac{4(య^3 - క^3) - 4(య - క)^3}{3(య - క)} + (య - క)^2 = (య + క)^2$$

$$= \frac{4(య^3 - క^3) - 4(య - క)^3 + 3(య - క)^3}{3(య - క)} = (య + క)^2$$

$$= \frac{4(య^3 - క^3) - (య - క)^3}{3(య - క)} = (య + క)^2$$ యోగవర్గమగుచున్నది.

ఘనాంతరమును 4 చే గుణించి రాశ్యంతరఘనమును వ్యవకలించి త్రిగుణిత రాశ్యంతరముచే భాగించినచో యోగవర్గమగునని తెలియుచున్నది.

ఇందులకు మ. మా. శ్రీ. బాపురేనశాస్త్రిగారి శ్లోకము.

ఘనాంతరాత్ వ్యబ్ధిహతాత్ రాశ్యంతరఘనోనితాత్ ।
త్రిఘ్నరాశ్యంతరేణాప్తం రాశియోగకృతిర్భవేత్ ॥

ఉదా:— పైఉదాహరణమునందే $98 \times 4 - 2^3 \div 3 \times 2$
$= 392 - 8 \div 6 = 384 \div 6 = 64$ ఇది రాశియోగవర్గము, మూలము రాశియోగము

110. సూ. (1) ఇట్లు ఘనయోగమును, రాశియోగమును, తెలిసినచో ఘనయోగమును రాశియోగముచే భాగించి వచ్చినదాని రాశియోగవర్గమునుండి తీసివేసి శేషమును $\frac{4}{3}$ చే గుణించి దానిని తిరుగ రాశియోగవర్గమునుండి వ్యవకలించిన రాశ్యంతరవర్గమగును.

ఉదా:— రాశియోగము 8. ఘనయోగము 152 చెప్పబడినచో

$$8^2 - \left[\left\{8^2 - (152 \div 8)\right\}\frac{4}{3}\right] = 64 - \left\{(64 - 19)\frac{4}{3}\right\} = 64 - 60 = 4$$ అంతరవర్గము.

ఉపపత్తి: $య^3 + క^3$, $య + క$ తెలిసినవి.

$య^3 + క^3 = (య + క) \times (య^2 + క^2 - యక)$

రెండుపక్షములను $(య + క)$ చే భాగించి (—1) చే గుణించి $(య + క)^2$ ను

కలుప $(య + క)^2 - \frac{య^3 + క^3}{య + క} = 3యక$. రెండుపక్షములను 3 చే భాగింప

రాశిఘాతమగును. మిత్రము (108 ప్ర) పద్ధతి చే అంతరవర్గము.

$$(య + క)^2 - \frac{4\left\{(య + క)^2 - \frac{య^3 + క^3}{య + క}\right\}}{3} =$$

$(య + క)^2 - 4యక = (య - క)^2$

ఇట్లు పద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది. దీనిని సవర్ణింపగా

(2) $$(య + క)^2 - \frac{4(య + క)^3 - (య^3 + క^3)4}{3(య + క)} = (య - క)^2$$

$$= \frac{4(య^3 + క^3) - (య + క)^3}{3(య + క)} = (య - క)^2$$ దీనిచే

ఘనయోగమును 4 చే గుణించి యోగఘనమును వ్యవకలించి త్రిగుణిత రాశియోగముచే భాగింప అంతరవర్గమగును. అని తెలియుచున్నది. ఇందులకు పద్యము.

ఘనయోగాత్ వ్యబ్ధిహతాత్ రాశియోగఘనోనితాత్ ।
త్రిఘ్నరాశియోగేనాప్తం రాశ్యంతరకృతిర్భవేత్ ॥

ఇది 7 సంక్రమణ పరికరము.

౮ ప్రకరణము.

వర్గకర్మ

అథకించిద్వర్గకర్మప్రోచ్యతే

ఇష్టకృతి రష్టగుణితా వ్యేకాదలితా విభాజితేష్టేన
ఏకస్స్యా దస్యకృతిర్దలితాసైకా ఉపరో రాశిః ॥ ౩౩ ॥
రూపంద్విగుణేష్టహృతంసేష్టం ప్రథమోఽథవాపరో రూపం।
కృతియుతివియుతీవ్యేకే వర్గౌ స్యాతాంయయోరాశ్యోః ॥ ౩౪ ॥

టీ॥ ఇష్టకృతిః = ఇష్టాంకవర్గము, అష్టగుణితా = 8 చే గుణింపబడినదై, వ్యేకా = తీసివేయబడిన 1 టి గలదియై, దలితా = అర్ధింపబడినదై, ఇష్టేన = ఆ ఇష్టాంకముచే, విభాజితా = భాగింపబడినదై, ఏకఃస్యాత్ = ఒకరాశి అగును, అస్య = దీనియొక్క, కృతిః = వర్గము, దలితా = అర్ధింపబడినదై, సైకా = ఒకటితో కలుపబడినదై, అపరఃరాశిః = రెండవరాశి.

అథవా = లేక, రూపం = ఒకటి, ద్విగుణేష్టహృతం = రెండుచే గుణింపబడిన ఇష్టాంకముచే భాగింపబడినదై, సేష్టం = ఇష్టసంఖ్యతో కలుపబడినదై, ప్రథమః = మొదటిరాశి, రూపం = ఒకటి, అపరః = రెండవరాశి.

యయోః రాశ్యోః = ఏ రెండు రాసులయొక్క, కృతియుతివియుతీ = వర్గయోగమును, వర్గాంతరమును, వ్యేకే = ఒకటిచే తీసివేయబడినవియై, వర్గౌ స్యాతాం = వర్గరాసులు [మూలములభించునవి] అగుచున్నవో [అట్టిరాసులగుచును.]

111. ప్ర. వర్గములనుగూర్చిన గణితక్రియ వర్గకర్మ. అందును ఏ రెండు రాసులయొక్క వర్గయోగమునుండిగాని వర్గాంతరమునుండిగాని 1 టిని తీసివేసినను, కలిపినను నిశ్శేషముగ మూలములభించునో అట్టిరాసుల తెల్పి? ఇట్టిప్రశ్న వలనదు ఆరెండురాసులను తెలిసికొనుటకు చేయుగణితము వర్గకర్మ. ఈగణితము బీజగణితమున విశేషప్రయోగము గలదు. ఇచట సంగ్రహముగ ఆచార్యులు 1 టిని వ్యవకలించు ప్రశ్నలకు గణితమును సూచించియున్నారు.

(1) ఒక ఇష్టాంకమును కల్పించి దానిని 8 చే గుణించి 1 టి వ్యవకలించి అర్ధించి ఇష్టాంకముచే భాగింప ఒకరాశి యగును. ఈ రాశియొక్క వర్గము నర్ధించి 1 టిని కలుప రెండవరాశి యగును.

(2) ద్విగుణితమగు ఇష్టాంకముచే 1 టిని భాగించి ఇష్టాంకమును కలుప మొదటిరాశి యగును, 1 టి రెండవరాశి యగును.

వీటివర్గయోగవర్గాంతరములవలన 1 టిని తీసివేత మూలములువచ్చును.

ఉద్దేశకః

రాశ్యోర్యయోః కృతివియోగయుతీ నిరేకే మూలప్రదే ప్రవద తౌ మమమిత్ర యత్ర ; క్లిశ్యన్తి బీజగణితేపటవోఽపి మూఢా షోఢోక్త బీజగణితం పరిభావయన్తః ॥ ౩౫ ॥

అత్రప్రథమానయనే కల్పితమిష్టం $\frac{౧}{౨}$ అస్య కృతిః $\frac{౧}{౪}$ అష్టగుణా జాతః ౨ అయం వ్యేకః ౧ దలితః $\frac{౧}{౨}$ ఇష్టేన $\frac{౧}{౨}$ హృతో జాతః ప్రథమోరాశిః ౧

అస్యకృతిః ౧ దలితా $\frac{౧}{౨}$ సైకా $\frac{౩}{౨}$ అయమపరోరాశిః

ఏవమేతౌ రాశీ $\frac{౧}{౧}$, $\frac{౩}{౨}$ ఏవమేకేనేష్టేన జాతౌ రాశీ $\frac{౭}{౨}$, $\frac{౫౭}{౮}$ ద్వికేన $\frac{౩౧}{౪}$, $\frac{౯౯౩}{౩౨}$

అథద్వితీయప్రకారేణేష్టమ్ ౧ అనేనద్విగుణేనరూపం భక్తం $\frac{౧}{౨}$ ఇష్టేనసహితం జాతః ప్రథమోరాశిః $\frac{౩}{౨}$ ద్వితీయో రూపం ఏవం రాశీ $\frac{౩}{౨}$, $\frac{౧}{౧}$ ఏవం ద్వికేన $\frac{౯}{౪}$, $\frac{౧}{౧}$ త్రికేన $\frac{౧౯}{౬}$, $\frac{౧}{౧}$ త్ర్యంశేన జాతౌ రాశీ $\frac{౧౧}{౬}$, $\frac{౧}{౧}$

[illegible]

$(\frac{1}{2})^2 \times 8 - 1 \div 2 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times 8 - 1 \div 2 \div \frac{1}{2} = 1 \div 2 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = 1$

[illegible]

(2) [illegible]

$1^2 \times 8 - 1 \div 2 \div 1 = \frac{7}{2} \div 1 = \frac{7}{2}$

$(\frac{7}{2})^2 \div 2 + 1 = \frac{49}{4} \div 2 + 1 = \frac{49}{8} + 1 = \frac{57}{8}$

[illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible] $1 \div (2 \times 2) + 2 = \frac{9}{4}$ [illegible]

(5) [illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{7}{2}$, $\frac{57}{8}$

$(\frac{7}{2})^2 = \frac{49}{4}$, $(\frac{57}{8})^2 = \frac{3249}{64}$ [illegible] $\frac{49}{4} + \frac{3249}{64} - \frac{1}{1}$

$= \frac{784}{64} + \frac{3249}{64} - \frac{64}{64} = \frac{3969}{64}$ [illegible] $\frac{63}{8}$ [illegible]

[illegible] $\frac{3249}{64} - \frac{784}{64} - \frac{64}{64} = \frac{2401}{64}$

[illegible] $\frac{49}{8}$ [illegible]

[illegible]

Scanned by CamScanner

లీలాగణిత వ్యక్త వాలుసూత్రముచే $\frac{1}{2ఇ}$ దీనిని ఇష్టసంఖ్యగా కల్పించి చేయగా క మూల ము కనిష్ఠమూలము. పెండ్త్రి ప్రసంఖ్యామూలము జ్యేష్ఠమూలమున్న అగును.

ఇచటగుణకము $\frac{1}{4}$ క్షేపము 2 ఇష్టసంఖ్య $\frac{1}{2ఇ}$ దీనిని లీలాగణిత సూత్రప్రకా

రము క్షేపము 2 ను ఇష్టసంఖ్య $\frac{1}{2ఇ}$ చే భాగించి 4 ఇ' ఇది ఇష్టసంఖ్యను తీసి

వేయగా $\frac{8ఇ^2-1}{2ఇ}$ దీనిని అర్థించి $\frac{8ఇ^2-1}{4ఇ}$ దీనిని గుణకము $\frac{1}{4}$ యొక్క మూలము

$\frac{1}{2}$ చే భాగించి $\frac{8ఇ^2-1}{2ఇ}$ ఇది కనిష్ఠమూలము. కావున $క=\frac{8ఇ^2-1}{2ఇ}$ అగుచున్నది.

$\frac{8ఇ^2+1}{4ఇ}$ ఇది జ్యేష్ఠమూలము ఇచట జ్యేష్ఠమూలముతో పనిలేదు.

పూర్వము $య=\frac{1}{2}క^2+1$ అని సాధింపబడినది. కావున

$\because క=\frac{8ఇ^2-1}{2ఇ}\ \therefore య=\left(\frac{8ఇ^2-1}{2ఇ}\right)^2\frac{1}{2}+1$ అగుచున్నది. దీనిచే "ఇష్ట కృతిరష్టగుణితే" త్యాది సూత్రము (112 వ 1 వ) యొక్క ఉపపత్తి స్పష్టమగు చున్నది. (111 వ 2 వ) "రూపం ద్విగుణేష్టహృత" మిత్యాది ప్రకారాంతరోపపత్తి

(1) య (2) 1 ఈరెండును రాసులుగ కల్పింపబడినవి.

$య^2+1^2-1=య^2$ ఇట్లు ఒక ప్రశ్నభాగము సరిపడుచున్నది. అట్లు $య^2-1^2-1=య^2-2$ ఇది ఒక వర్గసంఖ్యయొక్క వర్గము కావలయును. $\therefore య^2-2=క^2$ అనుకొనగా $య^2=క^2+2$ అగుచున్నది.

ఇచట $క^2+2$ దీనికి సూత్రపపత్తియందువలెనే '2 ఇ' ఇష్టసంఖ్య కల్పించి "ఇష్టవర్గహృతః క్షేపః" ఇత్యాది సూత్రముచే చేయగా జ్యేష్ఠమూలము,

$\frac{1+2ఇ^2}{2ఇ}=\frac{1}{2ఇ}+ఇ$ ఇది "యూ" మానమగుచున్నది. కావున $\frac{1}{2ఇ}+ఇ$, 1 అని రాసులగుచున్నవి.

అథవా సూత్రమ్.

112 వ. ఇష్టస్య వర్గవర్గో ఘనశ్చ తావష్టసంగుణౌ ప్రథమః।
సైకో రాశీస్యాతా మేవం వ్యక్తే ఽథవాఽవ్యక్తే॥ ౩౫॥

టీ. ఇష్టస్య = ఇష్టసంఖ్యయొక్క, వర్గవర్గః = వర్గవర్గము, (చతుర్ఘాతము) ఘనశ్చ = ఘనమున్ను, తౌ = ఆ రెండును అష్టసంగుణౌ = 8 చే గుణింపబడవలయును. ప్రథమః = మొదటిది (8 చే గుణింపబడిన వర్గవర్గము) సైకః = ఒకటితో కూడినది కావలయును. ఏవం వ్యక్తే, అథవా అవ్యక్తే రాశీస్యాతాం = ఇట్లు వ్యక్తగణితమందు గాని, అవ్యక్తగణితమందుగాని రాసులు అగును. వీటివర్గయోగ వర్గాంతరములు ఏకోనములై మూలదములు అగుచున్నవి.

న్యాసః ఇష్టమ్ $\frac{1}{2}$ అస్యవర్గవర్గః $\frac{1}{16}$ అష్టఘ్నః $\frac{1}{2}$ సైకో జాతః $\frac{3}{2}$ ప్రథమోరాశిః పునరిష్టమ్ $\frac{1}{2}$ అస్యఘనః $\frac{1}{8}$ అష్టగుణో జాతో ద్వితీయోరాశిః $\frac{1}{1}$ ఏవంజాతౌ రాశీ $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{1}$ అథవా ద్వికేనేష్టేన 129, 64 త్రికేణ 649, 216, ఏవమనంతధేష్టవశాత్ బహుధా.

ఉదా: ఇష్టము $\frac{1}{2}$ దీనివర్గవర్గము $\frac{1}{16}$ దీనిని 8 చే గుణించ $\frac{1}{2}$ ఒకటికలుప $\frac{3}{2}$ ఇది మొదటి రాశి. ఇష్టము $\frac{1}{2}$ యొక్క ఘనము $\frac{1}{8}$ రెండవరాశి.

ఇష్టము 2 అయినచో వర్గవర్గము 16 దీనిని 8 చే గుణించ 128 ఒకటికలుప 129 మొదటిరాశి. ఇష్టము 2 యొక్క ఘనము 8 దీనిని 8 చే గుణించ 64 రెండవరాశి.

ఇష్టము 3 అయినచో 649, 216 రాసులు. ఇట్లు ఇష్టవశమువలన అనంతవిధములు అగును.

ఉపపత్తి: ఇచట (1) య + 1 (2) క రాసులు కల్పింపబడెను.

వీటివర్గయోగ వర్గాంతరములు $(య+1)^2\pm క^2=(య^2+2య+1)\pm క^2$

లీలావతీ వర్గ ప్రకృతి సూత్రము చే $\frac{1}{2ఇ}$ దీనిని ఇష్టసంఖ్యగా కల్పించి చేయగా క మూలము కనిష్ఠమూలము. పెంచిన సంఖ్యామూలము జ్యేష్ఠమూలమున్న అగును.

ఇచట గుణకము $\frac{1}{4}$ క్షేపము 2 ఇష్టసంఖ్య $\frac{1}{2ఇ}$ చే లీలావతీ సూత్రప్రకారము క్షేపము 8 ను ఇష్టసంఖ్య $\frac{1}{2ఇ}$ చే భాగింప 4 ఇ' ఇచట ఇష్టసంఖ్యను తీసివేయగా $\frac{8ఇ^2-1}{2ఇ}$ దీనిని అర్ధించి $\frac{8ఇ^2-1}{4ఇ}$ దీనిని గుణకము $\frac{1}{4}$ యొక్క మూలము $\frac{1}{2}$ చే భాగింప $\frac{8ఇ^2-1}{2ఇ}$ ఇది కనిష్ఠమూలము. కావున క $=\frac{8ఇ^2-1}{2ఇ}$ అగుచున్నది. $\frac{8ఇ^2+1}{4ఇ}$ ఇది జ్యేష్ఠమూలము. ఇచట జ్యేష్ఠమూలముతో పని లేదు.

పూర్వము $య=\frac{1}{2}క^2+1$ అని సాధింపబడినది. కావున

$\because క=\frac{8ఇ^2-1}{2ఇ}\ \therefore య=\left(\frac{8ఇ^2-1}{2ఇ}\right)^2\frac{1}{2}+1$ అగుచున్నది. దీనిచే "ఇష్టకృతిరష్టగుణితే" త్యాది సూత్రము (112 వ శ్లో) యొక్క ఉపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది. (111 శ్లో. 2 వ) "రూపం ద్విగుణేష్టహృత" మిత్యాది ప్రకారోపపత్తి

(1) య (2) 1 ఈ రెండును రాసులుగ కల్పింపబడినవి.

$య^2+1^2-1=య^2$ ఇట్లు ఒక పక్షము సరిపడుచున్నది. అట్లు $య^2-1^2-1=య^2-2$ ఇది ఒక వర్గసంఖ్య యొక్క వర్గము కావలయును. $\therefore య^2-2=క^2$ అనుకొనగా $య^2=క^2+2$ అగుచున్నది.

ఇచట $క^2+2$ దీనికి సమీకరణోపపత్తియందువలె '2 ఇ' ఇష్టసంఖ్య కల్పించి "ఇష్టభక్తో ద్విధా క్షేపః" ఇత్యాది సూత్రముచే చేయగా జ్యేష్ఠమూలము,

$\frac{2+2ఇ^2}{2ఇ}=\frac{1}{2ఇ}+ఇ$ ఇది "యా" సమమగుచున్నది. కావున $\frac{1}{2ఇ}+ఇ,\ 1$ ఇవి రాసులగుచున్నవి.

అథవా సూత్రమ్.

112 శ్లో. ఇష్టస్య వర్గవర్గో ఘనశ్చ తావష్టసంగుణౌ ప్రథమః॥
సైకౌ రాశీస్యాతా మేవంవ్యక్తే ఽథవాఽవ్యక్తే॥ 3॥

టీ॥ ఇష్టస్య = ఇష్టసంఖ్యయొక్క, వర్గవర్గః = వర్గవర్గము, (చతుర్ఘాతము) ఘనశ్చ = ఘనమున్ను, తౌ = ఆరెండును అష్టసంగుణౌ = 8 చే గుణింపబడవలయును. ప్రథమః = మొదటిది (8 చే గుణింపబడిన వర్గవర్గము) సైకః = ఒకటితో కూడినది కావలయును. ఏవంవ్యక్తే అథవా అవ్యక్తే రాశీస్యాతాం = ఇట్లు వ్యక్తగణితమందుగాని, అవ్యక్తగణితమందుగాని రాసులు అగును. [illegible]

స్వా॥ ఇష్టమ్ అస్య వర్గవర్గః అష్టఘ్నః సైకో జాతః ప్రథమో రాశిః పునరిష్టమ్ అస్య ఘనః అష్టగుణో జాతో ద్వితీయో రాశిః ఏవం జాతౌ రాశీ, అథవా కేనేష్టేన [illegible] ద్వికేన [illegible], త్రికేణ [illegible], ఏవమనన్త్యా వ్యక్తే విప్రాశ్నో స్యాతాం [illegible]

ఉదా॥ ఇష్టము $\frac{1}{2}$ దీని వర్గవర్గము $\frac{1}{16}$ దీనిని 8 చే గుణింప $\frac{1}{2}$ ఒకటి కలుప $\frac{3}{2}$ ఇది మొదటి రాశి. ఇష్టము $\frac{1}{2}$ యొక్క ఘనము $\frac{1}{8}$ రెండవ రాశి.

ఇష్టము 2 అనుకొన వర్గవర్గము 16 దీనిని 8 చే గుణింప 128 ఒకటి కలుప 129 మొదటి రాశి. ఇష్టము 2 యొక్క ఘనము 8 దీనిని 8 చే గుణింప 64 రెండవ రాశి.

ఇష్టము 3 అనుకొన 649, 216 రాసులు. ఇట్లు ఇష్టవశమున అనంతరాసులగును.

ఉపపత్తి :- ఇచట (1) $య+1$ (2) క రాసులుగ కల్పింపబడెను.

వీటి వర్గయోగము వర్గాంతరము $(య+1)^2\pm క^2=(య^2+2య+1)\pm క^2$

[illegible]

పాటీసూత్రోపమం బీజం గూఢమిత్యవభాసతే।
నాస్తి గూఢమమూఢానాం నైవ షోఢోక్తమేకధా॥ 3॥
అస్తి త్రైరాశికం పాటీ బీజం చ విమలా మతిః।
కిమజ్ఞాతం సుబుద్ధీనామతో మందార్థముచ్యతే॥ 3॥

ఇతివర్గకర్మ

[illegible]

ఇతి 8 ప్రకరణము వర్గకర్మ

9 ప్రకరణము.

గుణకర్మ.

తత్ర దృష్టమూలజాతౌ కరణసూత్రం వృత్తద్వయం

గుణఘ్నమూలోనయుతే స్వరాశే ద్దృష్టస్య యుక్తస్య గుణార్ధకృత్యాః।
మూలం గుణార్ధేన యుతం విహీనం వర్గీకృతం ప్రష్టురభీష్టరాశిః॥ 1॥
యది లవైర్ఊనయుతస్స రాశి రేకేన భాగోనయుతేన భక్త్వా।
దృశ్యం తథా మూలగుణం చ తాభ్యాం సాధ్యస్తతః ప్రోక్తవదేవ రాశిః॥ 2॥

[illegible]

[illegible]

(2) [illegible]

113. [illegible] (1) [illegible]

(2) [illegible]

[illegible]

$$\therefore \text{యా} \mp \frac{\text{గు}}{2} = \sqrt{\text{దృ} + \left(\frac{\text{గు}}{2}\right)^2}$$

[illegible]

$$\therefore \text{యా} = \sqrt{\text{దృ} + \left(\frac{\text{గు}}{2}\right)^2} + \frac{\text{గు}}{2}$$

$$\therefore \text{యా}^2 = \left\{ \sqrt{\text{దృ} + \left(\frac{\text{గు}}{2}\right)^2} \pm \frac{\text{గు}}{2} \right\}^2 = \text{[illegible]}$$

[illegible]

(2) [illegible]

[illegible]

$$\therefore \text{యా}^2 = \left\{ \sqrt{\text{దృ} + \left(\frac{\text{గు}}{2}\right)^2} \pm \frac{\text{గు}}{2} \right\}^2 \text{[illegible]}$$

(1) మూలే సదృశ్యే నాయకమణురాహరణమ్.

బాలే మరాళకులమూలదళాని సప్త తీరే విలాసభరమంథరగాణ్యపశ్యం।
కుర్వచ్చ కేలికలహం కలహంసయుగ్మం శేషం జలే వద మరాళకుల
ప్రమాణం॥ ౬౬॥

న్యాసః। మూలగుణకః ౭/౨ దృష్టమ్ ౨, దృష్టస్యాస్య ౨ గుణార్ధకృతేశ్చ ౪౯/౧౬ యుక్తస్య ౮౧/౧౬ మూలమ్ ౯/౪ గుణార్ధేన ౭/౪ యుతం ౧౬/౪ వర్గీకృతం జాతం హంసకులమానమ్ ౧౬.

తా॥ బాలా! ఒకహంసలగుంపులోని గల హంసలసంఖ్యయొక్క వర్గమూలమును అర్ధించి 7 చే గుణించగా వచ్చినన్ని హంసలు అనగా మూలసంఖ్యను 7/2 చే గుణించగా వచ్చినన్ని హంసలు అతివిలాసముచే మెల్లగ ఒడ్డున తిరుగుచున్నవి. మిగిలినవి రెండు. రెండు హంసలు క్రీడాకలహము చేయుచున్నవి. హంసలెన్ని యుండును?

ఇచట హంససంఖ్యయొక్క మూలగుణకము 7/2 గుణకము దృష్టసంఖ్య హంసలు 2 హంసల గుణకగుణితమూలసంఖ్యను తీసివేయగా దృష్టము 2 అగుచున్నది. కావున (1) వర్గమూలప్రకారము గుణకము 7/2 అర్ధించి 7/4 దీనివర్గము 49/16 దృష్టము 2 ను కలుప 81/16 దీనిమూలము 9/4 దీనిని గుణకార్ధము 7/4 ను కలుప 4 దీనిని వర్గించిన 16 ఇది రాశియగుచున్నది. అనగా $\left\{\sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2+\frac{2}{1}}+\frac{7}{2\times 2}\right\}^2$

$$=\left(\sqrt{\frac{49}{16}+\frac{2}{1}}+\frac{7}{4}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{81}{16}}+\frac{7}{4}\right)^2=\left(\frac{9}{4}+\frac{7}{4}\right)^2=16$$

అగును. ఈ 16 మూలము 4 ను 7/2 చే గుణించిన 14 రాగా దీనిని తీసివేయ 2 దృశ్యము.

(2) మూలయుతే దృశ్యే ఉదాహరణం

స్వపదైర్నవభిర్యుక్తః స్యాత్సప్తాశీతికం వద।
తం రాశిం వేత్సి చేద్బాలే వ్యక్తం గణితం తావకం॥ ౬౭॥

మూలగుణః ౯ దృశ్యం ౧౨౪౦ గుణార్ధం ౯/౨ అస్య కృత్యా ౮౧/౪ యుక్తం జాతం ౫౦౪౧/౪ అస్య మూలం ౭౧/౨ గుణార్ధేన ౯/౨ అత్ర విహీనం ౬౨/౨ వర్గీకృతం ౩౮౪౪/౪ భేదే సత్యాప్తో జాతో రాశిః ౯౬౧

తా॥ విద్యాంసుడా! ఒకానొకసంఖ్యయందు దానియొక్క వర్గమూలము 9 చే గుణింపగా వచ్చు సంఖ్యను కలుపగా 1240 అయ్యెను. ఆసంఖ్యయెంత? చెప్పుము.

ఇచట గుణకగుణితమూలసంఖ్య రాశియందు కలుపబడెను. మూలగుణకము 9 దృష్టసంఖ్య 1240 గుణకార్ధము 9/2 దీనివర్గము చేయుటలో గుణకార్ధవర్గము 81/4 దీనిని దృష్టసంఖ్య 1240 ను కలుపగా 5041/4 దీనిమూలము 71/2 ఇందు 9/2 ను తీసివేయగా 31 దీనివర్గము 961 అగుచున్నది. ఇందు తొలుత గుణకగుణితమూలసంఖ్య కలుపబడినదగుటచేతనే గుణార్ధవర్గయుత దృష్టసంఖ్యయొక్క మూలమునుండి గుణార్ధము తీసివేయబడినది.

$$\left(\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+1240}-\frac{9}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{81+4960}{4}}-\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{71}{2}-\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{62}{2}\right)^2$$
$$=31^2=961$$

(3) ఉదాహరణమ్.

యాతం హంసకులస్య మూలదశకం మేఘాగమే మానసం
ప్రోడ్డీయ స్థలపద్మినీవన మగాదష్టాంశకో ఖాత్తతః।
బాలే బాలమృణాలశాలిని జలే కేళిక్రియాలాలసం
దృష్టం హంసయుగత్రయం చ సకలం యూథస్య సంఖ్యాం వద॥ ౬౮॥

న్యాసః మూలగుణః ౧౦ అష్టాంశః ౧/౮ దృశ్యమ్ ౬ యథా హంసానాం యావత్ తావత్ అష్టాంశేన భాగోనేన ౭/౮ దృశ్యమూలగు

తథోక్తకరణేన జాతం దృశ్యం $\frac{౪౮}{౭}$ మూలగుణః $\frac{౮౦}{౭}$ గుణార్ధం $\frac{౪౦}{౭}$ అస్య కృత్యా $\frac{౧౬౦౦}{౪౯}$ యుక్తం $\frac{౧౯౩౬}{౪౯}$ అస్య మూలం $\frac{౪౪}{౭}$ గుణార్ధేన $\frac{౪౦}{౭}$ యుతం ౧౨ వర్గీకృతం జాతో హంసరాశిః ౧౪౪

తా॥ [illegible] 10 [illegible] సంఖ్యను చెప్పుము.

[illegible]

మూలగుణకము 10 రాశ్యంశము $\frac{1}{8}$ దృష్టసంఖ్య 6

[illegible] 1 [illegible] దృష్టసంఖ్యను భాగించి [illegible] చేయవలెను. అట్లు చేయగా $\frac{1}{1}-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ గాన $\frac{10}{1}\div\frac{7}{8}=\frac{80}{7}$ = గు అట్లు $\frac{6}{1}\div\frac{7}{8}=\frac{48}{7}$ = దృ అగుచున్నది. [illegible] చేయగా రాశి [illegible]

ఎట్లనగా: $\left\{\sqrt{\left(\frac{80}{7\times2}\right)^2+\frac{48}{7}}+\frac{80}{7\times2}\right\}^2=\left(\sqrt{\frac{1600}{49}+\frac{336}{49}}+\frac{40}{7}\right)^2$

$=\left(\frac{44+40}{7}\right)^2=12^2=144$ రాశి హంససంఖ్య

(౪) ఉదాహరణమ్.

పార్థః కర్ణవధాయ మార్గణగణం క్రుద్ధో రణే సందధే।
తస్యార్ధేన నివార్య తచ్ఛరగణం మూలైశ్చతుర్భిర్హయాన్।
శల్యం షడ్భిరథేషుభిస్త్రిభిరపి ఛత్రం ధ్వజం కార్ముకం
చిచ్ఛేదాస్య శిరః శరేణ కతి తే యానర్జునః సందధే॥ ౭౫॥

న్యాసః, భాగః $\frac{1}{2}$ మూలగుణకః ౪ దృశ్యమ్ ౧౦ యథోక్తకరణేన జాతం బాణమానం ౧౦౦

తా॥ [illegible] అర్జునుడు [illegible] ఎన్ని బాణములను సంధించెను? [illegible]

ఇచట మూలగుణకము 4 రాశ్యంశము $\frac{1}{2}$ దృశ్యము 10

[illegible] అట్లు చేయగా $4\div\frac{1}{2}=\frac{8}{1}=8$, $\frac{10}{1}\div\frac{1}{2}=20$ = దృశ్యం [illegible] $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ [illegible] $\frac{1}{2}$ చేత భాగింపబడినది యని గ్రహింపవలెను

$$\left\{\sqrt{\frac{20}{1}+\left(\frac{8}{2}\right)^2}+\frac{8}{2}\right\}^2=(\sqrt{36}+4)^2=100 \text{ బాణసంఖ్య.}$$

(౫ ఉదాహరణం)

అపిచ,

అలికులదలమూలం మాలతీం యాతమష్టౌ
నిఖిలనవమభాగాశ్చాలినీ భృంగమేకం।
నిశి పరిమలలుబ్ధం పద్మమధ్యే నిరుద్ధం
ప్రతిరణతి రణంతం బ్రూహి కాంతేఽలిసంఖ్యాం॥ ౭౬॥

తా॥ [illegible]

మొక్క ఇట్టిదగుచో తెలియబడుచున్న యాదృశమొక్క రాశియగు పురమొట్టిదగుదనెను, బాలికా! భక్తియుక్తసంఖ్యను చెప్పుము.

వా. భా. అత్రోద్దిష్టరాశేః పరాంశోద్దిష్టకం రాశ్యర్ధమూలంచ రాశేః ఋణం రూపద్వయం దృశ్యం. ఏతద్విగుణం దృశ్యం చాదితం రాశ్యర్ధస్య భవతి. తత్రాపి రాశ్యంశార్ధం రాశ్యంశస్యార్ధ స్యాదితి భాగస్యైవ. తథాన్యాసః॥

మూలగుణః $\frac{1}{2}$ భాగః $\frac{1}{2}$ దృశ్యమ్ ౧ (రాశ్యర్ధస్యస్యాదితి భాగస్యాపి) అతః ప్రాగ్వల్లబ్ధం రాశిదలం ౯ ఏతద్ద్విగుణిత మూలగుణనాయమ్ ౭౨ ఉద్దిష్టరాశ్యంశమూలపక్షేన మూలగుణం దృశ్యం చ విభజ్య సాధయా రాశ్యంశాన్యథా॥

ఉదాహరణమునందు రాశ్యంశము $\frac{1}{8}$ యగు రాశ్యర్ధమూలమును రాశివలన తీసివేయగా 2 దృష్టసంఖ్య యగుచున్నది. ఇచట రాశ్యర్ధమూలము తీసివేయబడుటచేత రాశ్యర్ధమును సాధించి రాశ్యర్ధమును రెట్టించినచో రాశి యగునని తెలియును. కావున రాశిసంబంధములగు భాగములను దృశ్యమును రాశ్యర్ధమునకు సాధించుకొనవలయును. అందుచే రాశ్యర్ధము సాధింపవలయును.

పరిశ్రేణిరాశి యొక్క $\frac{1}{8}$ భాగములచే నంకసంఖ్య యగుచో అనుకున్నను అర్థంబెనను. రాశ్యర్ధము యొక్క $\frac{1}{8}$ భాగములనైనను సమానమే యగుచున్నది.

ఎట్లనగా! రాశి = య అనుకొందము $\frac{\text{య}}{1}$లో $\frac{8}{8}$ = $\frac{\text{య}\ 8}{8}$ దీనిని అర్థింప $\frac{\text{య}\ 8}{8 \times 2}$ అగుచున్నది. ఇట్లు రాశ్యర్ధము $\frac{\text{య}}{2}$లో $\frac{8}{8}$ = $\frac{\text{య} \times 8}{8 \times 2}$ అగుచున్నది.

కావున రాశ్యర్ధమును రాశిగ భావించి గణితము చేయునప్పుడు రాశిభాగములను రాశ్యర్ధమునకు మార్పుచేయవక్కఱలేదు. దృష్టసంఖ్య 2 రాశివలనిది గావున రాశ్యర్ధమునకు ద్విగుణించవలయును. ఇట్లు రాశ్యర్ధమూలము రాశివలన తీసివేయబడి నది. కావున రాశ్యర్ధమును సాధింపవలెనుచో రాశ్యర్ధమునకు రాశ్యర్ధమూలము యొక్క నెగు తీసివేయబడినది యని తెలియవలసియున్నది. కావున రాశ్యర్ధ గుణ

కము $\frac{1}{2}$ అగుచున్నది. ఇట్లు గుణకదృశ్యములనర్ధించి గు $\frac{1}{2}$ దృ 1 రాశ్యంశము $\frac{1}{8}$ రాశ్యర్ధాంశములు. కావున $(1-\frac{1}{8})$ చే గుణకదృశ్యములు భాగించి గు $\frac{4}{7}$, దృశ్యము $\frac{8}{7}$.

ఇపుడు $\left\{\sqrt{\frac{9}{1}+\left(\frac{9}{4}\right)^2}+\frac{9}{4}\right\}^2=\left(\sqrt{\frac{225}{16}}+\frac{9}{4}\right)^2=6^2=36$ రాశ్యర్ధము దీనిని ద్విగుణించిన 72 రాశియగుచున్నది.

ఇట్లు రాశియొక్క ఒకానొకయంశముయొక్క మూలము రాశివలన తీసిన యెడల ఉదాహరణమునందు మూలగుణకమును దృశ్యమును తద్ధరించి దానిచే రాశ్యంశమునకు రాశియగు నేయంగవలయును.

౬ ఉదాహరణము.

యో రాశిరష్టాదశభిః స్వమూలై రాశేస్త్రిభాగేన సమన్వితశ్చ।
జాతం శతద్వాదశకం తమాశు జానీహి పాటీగణితజ్ఞ రాశిమ్॥ ౭౭॥

న్యాసః. మూలగుణః ౧౮ భాగః $\frac{1}{3}$ దృశ్యమ్ ౧౨౦౦

అత్ర సైకభాగయుతేన $\frac{4}{3}$ మూలగుణం దృశ్యం చ భక్త్వా ప్రాగ్వ జ్జాతో రాశిః ౫౭౬॥

ఇతి గుణకర్మ

తా॥ ఏకానొకసంఖ్యయొక్క మూలమును 18 చే గుణించగా వచ్చు సంఖ్యను రాశిలోని 3 వ భాగమును రాశియందు కలుప 1200 అగుచున్నది. పాటీగణిత తెలియునవారు ఆసంఖ్యను తెలియుము.

ఈ ఉదాహరణమునందు గుణగుణితమూలసంఖ్యను రాశ్యంశమును రాశి యందు కలుపగా వచ్చుసంఖ్య దృశ్యమగుచున్నది.

మూలగుణకము 18 రాశ్యంశము $\frac{1}{3}$ దృశ్యము 1200 ఇపుడు $(1+\frac{1}{3})$ చే భాగించి సంక్షేపించబడిన దృశ్యగుణకములు దృ = 900 గు = $\frac{27}{2}$ కావున

$$\left\{\sqrt{900+\left(\frac{27}{4}\right)^2}-\frac{27}{4}\right\}^2=\left(\sqrt{\frac{15129}{16}}-\frac{27}{4}\right)^2=$$

$$\left(\frac{123-27}{4}\right)^2=\left(\frac{96}{4}\right)^2=24^2$$

24 యొక్క వర్గము 576 అభీష్టసంఖ్య యగుచున్నది.

ఇతి ౩ పరికర్మము గుణకర్మ.

10 ప్రకరణము.

త్రైరాశికము—అనుపాతము

114. ప్ర. (1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

అనుపాతశబ్దార్థము :— [illegible]

[illegible]

[illegible]

$3 \times 5 = 15$

$8 \times 5 = 40$

[illegible]

[illegible]

$3 \div 15 = 8 \div 40$ లేక $3 : 15 : : 8 : 40$

[illegible]

[illegible]

15 : 3 : : 40 : 8 [illegible]

[illegible]

3 : 40 : : 8 : 15

[illegible] 40 : 8 : : 15 : 3 [illegible]

[illegible]

ఇందు 3 : 15 : : 8 : 40 ఇది క్రమనిష్పత్తి

40 : 8 : : 15 : 3 ఇది వ్యుత్క్రమనిష్పత్తి

[illegible]

3 : 8 : : 15 : 40 [illegible]

(4) [illegible]

[illegible]

3 : 15 : : 8 : 40 ఇది [illegible]

3 : 15 : : 9 : 45 ఇది [illegible]

[illegible]

[illegible]

(5) [illegible]

[illegible] 3, 8 [illegible] 15, 40 [illegible]

(6) [illegible]

[illegible]

[illegible]

8 : 40 : : 3 : 15 లేక $\frac{40}{8}$ = $\frac{15}{3}$

[illegible] 40 : 8 : : 15 : 3 లేక $\frac{8}{40}$ = $\frac{3}{15}$ [illegible]

[illegible]

ఇందు 3 : 15 : : 8 : 40 ఇది [illegible]

40 : 8 : : 15 : 3 ఇది [illegible]

[illegible]

3 : 8 : : 15 : 40 లేక $\frac{3}{8}$ = $\frac{15}{40}$ ఇది [illegible]

(4) [illegible]

[illegible]

3 : 15 : : 8 : 40 ఇది [illegible]

3 : 15 : : 9 : 45 ఇది [illegible]

[illegible]

[illegible]

(5) [illegible]

[illegible] 3, 8 [illegible] 15, 40 [illegible]

[illegible]

(6) [illegible]

[illegible]

[illegible]

అథ త్రైరాశికకరణసూత్రం వృత్తమ్

ప్రమాణమిచ్ఛా చ సమానజాతీ ఆద్యంతయోస్తత్ఫలమన్యజాతి।
మధ్యే తదిచ్ఛాహతమాద్యహృత్స్యాదిచ్ఛాఫలం వ్యస్తవిధిర్విలోమే॥

[illegible]

[illegible]

115. [illegible]

(2) [illegible]

[illegible]

(3) [illegible]

ఉదాహరణమ్.

కుంకుమస్య సదలం పలద్వయం నిష్కసప్తమలవైస్త్రిభిర్యది।
ప్రాప్యతే సపది మే వణిగ్వర బ్రూహి నిష్కనవకేన కిం తతః॥ ౭౫॥

[illegible]

[illegible]

ఉదాహరణమ్ ౨.

[illegible] ॥ ౭౬॥

[illegible]

ఇచ్చిన ధనము ప్రమాణఫలముగానున్నది. అట్లు వ్రాసినయెడల ప్రమాణఫలమును గుణింపగా వచ్చిన ప్రమాణరాశిచే భాగించి ఇచ్ఛారాశిని గుణింపవలయును. అటులనే ఆచార్యులవారు ఆలోచించి చెప్పినది వ్రాసిచెప్పుచున్నారు.

ప్రమాణరాశి 63 ప్రమాణఫలము 104 ఇచ్ఛారాశి $12\frac{1}{4}$

$$\therefore \frac{12\frac{1}{4}\times 104}{63} = \frac{\frac{49}{4}\times 104}{63} = \frac{49\times 26}{63} = \frac{7\times 26}{9} = 20\frac{2}{9}$$ నిష్కములు.

అనగా 20 నిష్కములు, 3 ద్రమ్మములు, 8 పణములు, 3 కాకిణులు, 11 వరాటకములు, వరాటకములో $\frac{1}{3}$ వంతున్ను వెలయగుచున్నది. అని తెలియవలెను.

ఉదాహరణమ్ 3

ద్రమ్మద్వయేన సాష్టాంశా శాలితండులమానికా।
లభ్యా చేత్పణసప్తత్యా తదా కిం కథయాశు మే॥ ౮౦॥

అత్ర ప్రమాణస్య సజాతీయకరణార్థం ద్రమ్మద్వయస్య పణీకృతస్య న్యాసః. ౩౨, $\frac{9}{8}$, ౭౦, లబ్ధమానికే ౨ అష్టకః పృష్ఠ ౨.

ఓ! 2 ద్రమ్మములకు బియ్యము $1\frac{1}{8}$ మానిక వచ్చుచున్నది. అట్లయిన 70 పణములకు ఎంతబియ్యమువచ్చునో శీఘ్రముగ చెప్పుము. ప్రమాణరాశి 2 ద్రమ్మములు, ప్రమాణఫలము $1\frac{1}{8}$ మానిక. ఇచ్ఛారాశి 70 పణములు. ఇచట ప్రమాణరాశియు, ఇచ్ఛారాశియు ధనజాతిలోనివైనను ఒకటి ద్రమ్మజాతియు రెండవది పణజాతియు నగుటచే భిన్నజాతీయములైనవి. కావున రెంటిని ఒకద్రమ్మజాతిలోనిది గాని లేక ఒకపణజాతిలోనిది గాని మార్చుటచే ఒకజాతిగలవిగ చేయవలయును. కావున ద్రమ్మములను పణములుగ మార్చగా

ప్రమాణరాశి 32 పణములు ప్రమాణఫలము $\frac{9}{8}$ మానిక ఇచ్ఛారాశి 70 పణములు,

$$\therefore \frac{\frac{9}{8}\times 70}{32} = \frac{70\times 9}{8\times 32} = \frac{35\times 9}{4\times 32} = \frac{315}{128} = 2\frac{59}{128}$$

అనగా 2 మానికలు, 7 సేర్లు, 1 కుడుపము, 2 ప్రస్థములు, బియ్యము వచ్చును. లేక ఇచ్ఛారాశిని ద్రమ్మజాతిలోనికి మార్చగా

ప్ర రా 2 ద్రమ్మములు ప్ర ఫ $\frac{9}{8}$ మానిక ఇ రా $4\frac{3}{8}$ ద్రమ్మములు.

$$\therefore \frac{\frac{9}{8}\times\frac{35}{8}}{2} = \frac{9\times 35}{8\times 8\times 2} = \frac{315}{128} = 2\frac{59}{128}$$ పూర్వమువలెనే.

అథ వ్యస్తత్రైరాశికమ్

ఇచ్ఛావృద్ధౌ ఫలే హ్రాసో హ్రాసే వృద్ధిః ఫలస్య తు।
వ్యస్తం త్రైరాశికం తత్ర జ్ఞేయం గణితకోవిదైః॥ ౮౧॥

యద్యిచ్ఛావృద్ధౌ ఫలే హ్రాసః హ్రాసే వా ఫలవృద్ధిః స్యాత్ తత్ర వ్యస్తత్రైరాశికమ్।

తద్యథా।
జీవానాం వయసో మౌల్యే తౌల్యే వర్ణస్య హైమనే।
భాగహారే చ రాశీనాం వ్యస్తత్రైరాశికం భవేత్॥ ౮౨॥

116. ప్ర. (1) ఇదివరకు చూపబడిన అనుపాతత్రైరాశికములందు ప్రమాణరాశిని ప్రమాణఫలముతో గుణించి భాగించినట్లు ఇచ్ఛారాశి పెరిగినకొలది ఇచ్ఛాఫలము వృద్ధిపొందును, ఇచ్ఛారాశి తగ్గినకొలది ఇచ్ఛాఫలము తగ్గును. అట్లుగాక ఇచ్ఛారాశి పెరిగినకొలది ఇచ్ఛాఫలము తగ్గుటయు ఇచ్ఛారాశి తగ్గినకొలది ఇచ్ఛాఫలము వృద్ధిపొందుటయు గలిగినయెడల వ్యస్తత్రైరాశిక మగును.

(2) జంతువులయొక్క వయస్సునకు మూల్యమును నిర్ణయించునప్పుడు. అనగా జంతువులకు యౌవనదశయందు ఎక్కువ మూల్యమున్ను వార్ధకము వచ్చినకొలది తక్కువగను మూల్య మేర్పడుచున్నది. కావున జంతువుల వయస్సునుబట్టి వెలనిర్ణయించునపుడు ఇచ్ఛారాశి వృద్ధిపొందినకొలది ఇచ్ఛాఫలము తగ్గుచుండును కావున నప్పుడు వ్యస్తత్రైరాశికము.

(3) వర్ణము సంబంధించిన బంగారవ్యవహారిక మందును అనగా బంగారమునకు వన్నె హెచ్చినకొలది విలువ హెచ్చును. కావున కొంతవన్నెగల బంగారమునకు వన్నె తక్కువగలదానిని కలిపినప్పుడు వన్నె హెచ్చినకొలది బంగారపు పరిమాణము తక్కువగుచున్నది. వన్నె తక్కువయగుచో ఎక్కువ పరిమాణముగల బంగారము వచ్చును కావున యిచట వ్యస్తత్రైరాశికము.

(4) భారవాహకముల యొక్క భారవాహకత్వమందును అనగా ఎద్దుల యందును వ్యస్తత్రైరాశికము అగును. అనగా భారవాహకములను కొలతలుగ చిన్న పరిమాణముచే కొలిచినచో పరిమితిసంఖ్య అధికమగును. పెద్దపరిమాణముచే కొలిచినచో పరిమితిసంఖ్య అల్పమగును అగుచున్నది. కావున అల్పపరిమాణముచే పరిమితిసంఖ్యలు హెచ్చి త్రైరాశికము చేయవలసినచో ఇచ్ఛావృద్ధి యందు ఫలహ్రాసము ఇచ్ఛాహ్రాసమందు ఫలవృద్ధియు గలుగును గావున యిట వ్యస్తత్రైరాశికము.

(5) ఇట్లు ఇచ్ఛారాశియొక్క వృద్ధియందు ఫలహ్రాసము, ఇచ్ఛారాశియొక్క హ్రాసమందు ఫలవృద్ధియు గలుగుటను వ్యస్తమనబడును. లోకవ్యవహారమునందు నిటువంటివి వ్యస్తత్రైరాశికమని గ్రహింపవలయును.

(6) వ్యస్తత్రైరాశికమునందు ప్రమాణఫలమును ప్రమాణరాశిచే గుణించి ఇచ్ఛారాశిచే భాగించిన ఇచ్ఛాఫలమగును. క్రిందనుదాహరణములందు స్పష్టముగ చూపబడును.

ఉదాహరణమ్

(౧) ప్రాప్నోతి చేత్ షోడశవత్సరా స్త్రీ ద్వాత్రింశతం వింశతివత్సరా కిమ్।
(౨) ద్విధూర్వహో నిష్కచతుష్కముక్షా ప్రాప్నోతి ధూఃషట్కవహస్తదా కిమ్॥ ౭౭॥

న్యాసః ౧౬, ౩౨, ౨౦ లబ్ధం నిష్కాః ౨౫ ద్రమ్మాః ౯ పణాః ౯ కాకిణ్యౌ ౨ వరాటకాః ౮

ద్వితీయన్యాసః ౨, ౪, ౬ లబ్ధం ౧ భాగాశ్చ $\frac{౧}{౩}$

తా॥ (1) 16 సంవత్సరముల వయస్సుగలిగిన స్త్రీకి 32 నిష్కములవెల కలిగినయెడల 20 సంవత్సరముల వయస్సుగలదానికి ఎంతవెల వచ్చును?

(2) రెండు భారములను వహించినవృషభము 4 నిష్కములు కూలిగొనుచున్నది. అట్లయినచో 6 భారములను వహించినవృషభమునకు కూలియెంత యగును?

(వయస్సుబట్టి గాని బలమునుబట్టి గాని వయస్సునకు విలువ హెచ్చుటలేదు. 16 సంవత్సరముల వయస్సుగలదానికి "తారుణ్యము" గలదని వ్యవహరించు చున్నారు. కనుక ఆచార్యులవారు 'భారము' అని వ్యవహరించిరి. అనగా రెండు భారముల కెద్దునకు కూలి 4 మాడలు అయినచో 6 భారముల కెద్దునకు ఎన్ని మాడలు అగును? అని ప్రశ్నించుచున్నారు.)

పైప్రశ్నలయందు వయస్సు హెచ్చినకొలది మూల్యము తగ్గుచుండును గావున వయస్సునుబట్టి మూల్యమును నిర్ణయింపవలసినప్పుడు వ్యస్తత్రైరాశికము చేయవలయును.

(1) ఉదా 16 : 32 : : 20 : ఏ ఇది వ్యస్తత్రైరాశికము కావున

$$\frac{16 \times 32}{20} = \frac{32 \times 4}{5} = \frac{128}{5}$$ $25\frac{3}{5}$ నిష్కములు

(2) ఉదా 2 : 4 : : 6 : ఏ ఇదియును వ్యస్తత్రైరాశికము కావున

$$\frac{4 \times 2}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$ నిష్కములు అగుచున్నవి

2 ఉదాహరణమ్

దశవర్ణం సువర్ణం చేత్ గద్యాణకమవాప్యతే।
నిష్కేణ తిథివర్ణం తు తదా వద కియన్మితమ్॥ ౭౮.

న్యాసః ౧౦, ౧, ౧౫ లబ్ధమ్ $\frac{౨}{౩}$

తా॥ ఒక నిష్కమునకు 10 వన్నెగల బంగారము 1 గద్యాణకము అనగా 48 గురిగింజల యెత్తు వచ్చుచున్నది. అట్లయినచో 15 వన్నెగల బంగారము ఒక నిష్కమునకు ఎంతవచ్చును?

ప్రమాణము 10 పట్టములు ప్రమాణఫలము 48 గుంజలు ఇచ్ఛారాశి 15 పట్టములు.

$$\therefore \frac{10 \times 48}{15} = \frac{2 \times 48}{3} = \frac{96}{3} = 32$$ గుంజలయెత్తు వచ్చును.

4 ఉదాహరణం

సప్తార్ధ కేసరపలేన రాశౌ పణ్యస్య పణ్యమాపికే|
యదిమాపకశతం జాతం నిష్కాణాంచార్ధ కేసరే॥ ౩౭॥

న్యాసః 2, ౧౦౦, ౫ లబ్ధం ౧౪౦

ఇతి త్రైరాశికం

టీ॥ ఒక కొనకొశ ద్రవ్యరాశిని 7 అర్ధకర్షముల కుంకుమపుష్పమునుచే కొలచినచో 100 పణమానములగునది యగును. అట్లయితే 5 అర్ధకర్షములు కుంకుమపుష్పమునుచే కొలచినయెడల ఎన్ని పణమానములగునది యగును ?

సమాధానము $\frac{7 \times 100}{5} = 7 \times 20 = 140$ పణమానములగునది యగును.

117. ప్ర. ఇట్లే త్రైరాశికమునకు కొన్ని ఉదాహరణములు చూపబడుచున్నవి.

(1) ఒకపనిని 10 మనుష్యులు 6 గంటలకాలములో చేయుచున్నారు. అపనిని 15 గురు మనుష్యులు ఎంతకాలములో చేయుదురు ?

(2) ఒకభూమియందలి పంటను 20 మంది మనుష్యులు 5 రోజులు కోయుదురు. 25 గురు మనుష్యులు ఎన్నిదినములకు కోయుదురు ?

(3) ఒకగంటకు 30 మైళ్ళు నడచుమోటారుబండిచే ఒకగ్రామమును 18 గంటలకు చేరుదుము. ఆగ్రామమును గంటకు 40 మైళ్ళు నడచుమోటారుచే ఎంతకాలమునకు చేరుదుము.

(4) ఒకభూమిని 16 ఎద్దులు 14 రోజులలో దున్నును. 32 ఎద్దులు ఎన్నిరోజులలో ఆభూమిని దున్నును ?

(5) 24 మణుగుల బియ్యము 6 గురు మనుష్యులుగల సంసారమునకు 32 రోజులవరకు వచ్చును. 8 మనుష్యులుగల సంసారమునందు ఎన్నిరోజులు వచ్చును ?

(6) ఒక్కొక్క రోజునందును రోజునకు 4 గంటలకాలము 30 దినములు పనిచేసి 100 మనుష్యులు త్రవ్వబడిన చెరువును అదేమోతాదులో రోజునకు 8 గంటలు కాలముపనిచేసి ఎందరు త్రవ్వుదురు.

(7) 5 గజములు చుట్టుకొలతగల చక్రమును ఒకప్రదేశమునుండి మరియొక ప్రదేశమునకు నడిపించునప్పుడు 352 పర్యాయములు ఆచక్రము తిరిగినచో 10 గజములు చుట్టుకొలతగల చక్రము ఎన్ని పర్యాయములు తిరుగును ?

(8) ఒకప్రదేశమునందు చదునుచేయుటకు 3 చతురస్రపుటడుగులుగల రాళ్లు 88 పట్టుచున్నవి. అప్రదేశమునందు 8 చతురస్రపుటడుగులుగల రాళ్లు ఎన్ని పట్టును ?

ఇట్లు ఇచ్ఛారాశి వృద్ధియగునప్పుడు ఇచ్ఛాఫలము తగ్గుటయు ఇచ్ఛారాశి తగ్గినప్పుడు ఇచ్ఛాఫలము పెరుగుటయును కొన్నిటకలుగును. అట్టి ప్రశ్నలున్నయెడ వ్యస్తత్రైరాశికవిధమును ముందుగా లీలావతీకారుడు తెలియపరచెను. సామాన్యముగ గణితవిధమును గాని యీ త్రైరాశికమును సంబంధించినవిధము వర్ణించెను. అందు ప్రమాణరాశికిని ఇచ్ఛారాశికిని సామ్యమున్నయెడల త్రైరాశికము పొసగును. కావున తెలిసిన ప్రమాణేచ్ఛారాశులకు సామ్యమున్నదియు లేనిదియు విచారించి పిమ్మట సాధారణ త్రైరాశికమైనదియు వ్యస్తత్రైరాశికమైనదియు గమనించి గణితము చేయవలయును.

త్రైరాశికప్రశ్నలు

(1) ఒకతులం బంగారమునకు రూ 30 అ 4 పై 6 లు అయితే 3 చిన్నములు 2 గురివింజల ఎత్తుబంగారమునకు వెలయెంతయగును ?

(2) ఒకకాసు (20 చిన్నములు) బంగారమునకు వెల $19\frac{2}{3}$ రూపాయిలయితే $7\frac{1}{8}$ చిన్నములయెత్తు బంగారమునకు వెలయెంతయగును ?

(3) ఒకతులం కస్తూరి రూ 45.4 వెలయగుచో తు 0.48 కస్తూరికి ఎంత వెలయగును ?

(4) 8½ తోలాలకు 5¾ పైసా వెలయగుచున్నచో 282 తోలాలకు ఎన్ని పైసలు వెలయగును ?

(5) ఒక తోలాకు పైసలు 13,3 వెలయగుచుండి 50 తోలాలకు ఎన్ని పైసలు వెలయగును ?

(6) 2⅓ [illegible] 1 [illegible] ½ [illegible] 75 తోలాలు [illegible] ఎంతయగును ?

(7) [illegible] 8 [illegible] 5 [illegible] 10 గల [illegible] 35 అ 8 పై 9 [illegible] 125 అ 7 పై 3 [illegible] ఎంత [illegible] ?

(8) [illegible] 1 [illegible] 9 అ 8 పై 3 [illegible] 125 [illegible] ?

(9) [illegible] 4287 [illegible] 1 [illegible] 0 అ 7 పై 3½ [illegible] ?

(10) [illegible] 3 [illegible] 30155,5 [illegible] ఎంత [illegible] ?

(11) [illegible] 1 [illegible] 0 అ 5 పై 4 [illegible] 558 [illegible] ?

(12) [illegible] 9 గల [illegible] 0 అ 10 పై 6 [illegible] 36 [illegible] ఎంతయగును ?

(13) 23 [illegible] 1 [illegible] 7 అ 5 పై 9 [illegible] ఎంత [illegible] ?

(14) 8 పైసలకు 10 పైసలు [illegible] 385 పైసలు [illegible] ఎన్ని [illegible] ?

(15) 9 [illegible] 97⅔ [illegible] 53 [illegible] ఎంత [illegible] ?

(16) [illegible] 100 [illegible] 3½ [illegible] 3337 [illegible] ఎంత [illegible] ?

(17) [illegible] 100 [illegible] 1,8 [illegible] ఎంత [illegible] ?

(18) 100 [illegible] 1 [illegible] 6 అ 3 పై 8 [illegible] 135.48 [illegible].

(19) [illegible] 8 పైసలకు 987, 85 [illegible] 78 పైసలు 7 [illegible] 5 [illegible] ఎంతయగును ?

(20) 5 [illegible] 7 [illegible] 15 [illegible] ఎన్ని గంటలలో [illegible] ?

(21) [illegible] 30 గంటలలో [illegible] 45 గంటలలో [illegible] ఎన్ని గంటలలో [illegible] ?

[illegible] 1 గంటకు [illegible] $\frac{1}{30}$ [illegible]. అట్లు గంటకు [illegible] $\frac{1}{45}$ [illegible],

[illegible] $\frac{1}{30} - \frac{1}{45} = \frac{3-2}{90} = \frac{1}{90}$ [illegible]

1 గంటకు [illegible] 90 గంటలు [illegible] త్రైరాశికము [illegible].

(22) [illegible] 10 [illegible] 15 [illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{1}{10}$ [illegible]

[illegible] $\frac{1}{15}$ [illegible]

[illegible] $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ [illegible]

[illegible]

ఇది 10 ప్రకరణము త్రైరాశికము.

---

11 ప్రకరణము

పంచరాశికాదికము.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

118 ప్ర. [illegible] (1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

(5) [illegible]

[illegible]

[illegible]

న్యాసః ౧ / ౧౦౦ / ౫ | ౧౨ / ౧౬ / .. లబ్ధం కాలాంతరం = ౪౮/౫

అథ కాలజ్ఞానార్థం న్యాసః ౧ / ౧౦౦ / ౫ | .. / ౧౬ / ౪౮/౫ లబ్ధా మాసాః ౧౨

మూలధనార్థం న్యాసః ౧ / ౧౦౦ / ౫ | ౧౨ / .. / ౪౮/౫ లబ్ధం మూలధనమ్ ౧౬

తా॥ నూటికొకటికి 100 నకు నెల 1 టికి రూ 5 లు వడ్డీయగునేని పండ్రెండు 12 నెలకు రూ 16 లకును ఎంతవడ్డీయగుచున్నది ? పైనాత్రైరాశికారము వడ్డీసొమ్ము చెప్పితిరి మూలధనమును వృద్ధియును కాలమును చెప్పుము. అట్లనే మూలధనమును అడిగినను వడ్డీ ఎంతకాలమునకగును ? ఇట్లు అడిగినను వృద్ధి ఎంతమూలధనమునకగును ?

ఇందు 1 నెల ప్రమాణకాలము, రూ 100 లు ప్రమాణధనము. రూ 5 లు ప్రమాణఫలము. నె 12 లు ఇచ్ఛాకాలము. రూ 16 లు ఇచ్ఛాధనము ఇచ్ఛాఫలమెంత ?

పైచెప్పినత్రైరాశికము ప్రమాణరాశులను ఒకవైపునను ఇచ్ఛారాశులను వేరొకవైపునను వ్రాసియు ఫలమును మార్చియు చూపబడుచున్నది.

$$\begin{array}{c|c} 1 & 12 \\ \hline 100 & 16 \\ \hline 5 & .. \end{array} \quad \text{ఫలమును మార్చగా} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 12 \\ \hline 100 & 16 \\ \hline .. & 5 \end{array}$$

బహురాశిఘాతమును స్వల్పరాశిఘాతముచే భాగించగా

$$\frac{12\times16\times5}{100\times1}=\frac{12\times16}{10}=\frac{12\times4}{5}=9\tfrac{3}{5}$$ వడ్డీసొమ్ము అగుచున్నది.

ఇట్లు నె 1 టికి రూ 5 లు వృద్ధిరా॥ రూ 16 లకు రూ $9\frac{3}{5}$ లు వృద్ధి ఎంతకాలమునకు ?

$$\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 100 & 16 \\ \hline 5 & \frac{48}{5} \end{array} \quad \text{ఫలమును మార్చి చేయగా} \quad \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 100 & 16 \\ \hline \frac{48}{5} & 5 \end{array}$$ పైత్రైరాశికము బహురాశిఘాతమును అల్పరాశిఘాతముచే భాగించగా

$$\frac{1\times100\times\frac{48}{5}}{16\times5}=\frac{1\times20\times48}{16\times5}=1\times4\times3=12$$ కాలము మాసములు.

లేక ఇందు ఫలపరివర్తనముచేసినపిమ్మట ఎదురుగానున్న రాసులలో [illegible] భిన్నసంఖ్యగానున్న దీనిహారమును కుడివైపుసంఖ్యలలో చేర్చి బహురాశిఘాతమును అల్పరాశిఘాతముచే భాగించగా $\frac{1\times100\times48}{16\times5\times5}=1\times4\times3=12$ అగుచున్నది.

ఇట్లు నె 1 టికి 100 కి రూ 5 లు వృద్ధిరా॥ నె 12 లకు రూ $9\frac{3}{5}$ లు వృద్ధి ఎంతమూలధనమునకగును ?

$$\begin{array}{c|c} 1 & 12 \\ \hline 100 & \\ \hline 5 & \frac{48}{5} \end{array} \quad \text{ఫలపరివర్తనము చేయగా} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 12 \\ \hline 100 & \\ \hline \frac{48}{5} & 5 \end{array}$$ బహురాశిఘాతమును అల్పరాశిఘాతముచే భాగించగా

$$\frac{1\times100\times\frac{48}{5}}{12\times5}=\frac{1\times20\times48}{12\times5}=1\times4\times4=16$$ మూలధనము.

ఇచటనీవిషయము గమనింపదగియున్నది:— ఒకగీతునకు ఎడమవైపున ప్రమాణరాసులను కుడివైపున ఇచ్ఛారాసులను వ్రాయుటలో ఎడమవైపున వ్రాయబడిన ప్రమాణరాసులకు సజాతీయములగు ఇచ్ఛారాసులు ఎదురుగనుండునట్లు కుడివైపున ఇచ్ఛారాసులను వ్రాయవలయును. అనగా ప్రమాణేచ్ఛాకాలములు ప్రమాణేచ్ఛాధనములు ప్రమాణేచ్ఛాఫలములు ఇట్లు ఆయాసజాతీయరాసులు ఒకదానికొకటి ఎదురుగనుండునట్లు వ్రాయవలయును. ఇట్లేపంచరాశి మొదలగువానియందును సజాతీయరాసుల గమనించి వ్రాయవలయును.

ఉపపత్తి:— పంచరాశికము రెండుత్రైరాశికములచే సిద్ధించుచున్నది. ఇట్లు సప్తరాశ్యాదికము మూడునాలుగు త్రైరాశికములచే సిద్ధించుచున్నది.

ఎట్లనగా:— పైఉదాహరణమునకుసరించి నె 1 టికి రూ 100 టికి వడ్డీ రూ 5 లు రా॥ నెలలు 12 కు రూ 16 లకు ఎంతవడ్డీయగును త్రైరాశికమునందు

[illegible] రూ 100 లకు వృద్ధి రూ 5 లు అయినచో రూ 16 లకు ఎంత? ఈ త్రైరాశి [illegible] $\frac{5 \times 16}{100}$ [illegible]

[illegible] $\frac{5 \times 16}{100}$ వృద్ధి [illegible] 12 [illegible] ఎంత? ఈ త్రైరాశికము చే

$\frac{5 \times 16 \times 12}{1 \times 100}$ [illegible] వృద్ధి [illegible]

[illegible] $\frac{[illegible] \times [illegible] \times [illegible]}{[illegible] \times [illegible]}$ =

[illegible]

[illegible] = [illegible]

[illegible]

[illegible] ఈ త్రైరాశిక [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

౪	౧౬
3	౫
౧౦౦	[illegible]
౧౬ / ౫	

లబ్ధం [illegible] $\frac{4}{5}$

[illegible] రూ 100 లకు వృద్ధి రూ $5\frac{1}{5}$ [illegible] రూ $62\frac{1}{2}$ [illegible] చెప్పుము.

[illegible]

$$\frac{\frac{16}{5} \times 1\frac{1}{3} \times [illegible]}{\frac{1}{3} \times 100} = \frac{16 \times 125 \times 26 \times 3}{5 \times 2 \times 5 \times 4 \times 100}$$

[illegible]

[illegible] పైప్రశ్నమునందు

$$\frac{16\times125\times26\times3}{5\times2\times5\times4\times100}=\frac{8\times25\times26\times3}{1\times1\times5\times4\times100}=\frac{2\times1\times26\times3}{1\times1\times5\times1\times4}=\frac{13\times3}{5}=\frac{39}{5}=7\tfrac{4}{5}$$ [illegible]

[illegible] 150000 [illegible] 20000. [illegible] రూ 7 అ 12 పై $9\frac{3}{5}$ [illegible]

119. ప్ర. [illegible]

(1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

(5) [illegible]

(6) [illegible]

[illegible] నె 1 [illegible] రూ 100 [illegible] రూ 5 [illegible] 12 [illegible] రూ 16 [illegible] 12 [illegible] 16 [illegible] రూ 5 [illegible]

	ప్రమాణములు	మధ్యరాశి	గుణకములు
ప్ర రా	నె 1	వృద్ధి రూ 5 లు	ఇచ్ఛా కా నె 12లు
ప్ర ధ	రూ 100 లు		ఇచ్ఛా ధ రూ 16లు

[illegible] $\frac{5\times12\times16}{1\times100}=\frac{12\times16}{20}=\frac{3\times16}{5}=\frac{48}{5}=9\frac{3}{5}$ వృద్ధియగును.

(3) [illegible] నె 1 [illegible] రూ 100 [illegible] రూ 5 [illegible] రూ 16 [illegible] $\frac{48}{5}$ [illegible] ?

[illegible] 1 [illegible] రూ 5 [illegible] 1 [illegible] $\frac{48}{5}$ [illegible] రూ 100 [illegible] 1 [illegible] రూ 16 [illegible] రూ 100 [illegible] రూ 16 [illegible]

$$\therefore\ \frac{1\times100\times\frac{48}{5}}{16\times5}=\frac{100\times48\times1}{16\times5\times5}=\frac{20\times3}{5}=12 \text{ నెలలు.}$$

[illegible]

[illegible]

(1) 15 [illegible] 8 [illegible] 80 [illegible] 10 [illegible] ?

(2) 7 [illegible] 8 [illegible] రూ 90 [illegible] 15 [illegible] 11 [illegible] ?

(3) 30 మనుష్యులుంగలిగియుండుటకు 15 దినములకు బియ్యము 18కుంచములు సరిపడునో 15 మనుష్యులకు 6½ మాసములకు ఎంతబియ్యము కావలయును?

(4) 5 మనుష్యులు చెప్పులు 7 నెలలు ధరింపగా నవి 0 అ 9 నెలలు కావలయునో 9 మనుష్యులకు 8 నెలలు ధరింపగా నెన్ని కావలయును ?

(5) 45 అంగుళముల వెడల్పును 3 గజముల పొడవును గలవస్త్రము లెన్ని కావలయునో 30 అంగుళముల వెడల్పును 7 గజముల పొడవు గలిగిన వస్త్రములెన్ని ఎంతవలయును ?

(6) ప్రాంతమున 2 నిట్టమానుయున్న 3 గజముల పొడవు కలిగి 19 రూపాయలకునో 2½ నిట్టమాలు యున్న 2 గజముల పొడవు గల వస్త్రమును కొనవలెను?

సప్తరాశికోదాహరణమ్

విస్తారే త్రికరాః కరాష్టకమితా దైర్ఘ్యే విచిత్రాశ్చ చే
ద్రూపైరుత్కటపట్టసూత్రపటికా అష్టౌ లభంతే శతం।
దైర్ఘ్యే సార్ధకరత్రయాపరపటీ హస్తార్ధవిస్తారిణీ
తాదృక్కిం లభతే క్రయం క్రయవిధౌ వాణిజ్యకం వేత్సి చేత్॥ ౩౭౦

న్యాసః

౩	౧/౨
౮	౭/౨
౮	౧
౧౦౦	

లబ్ధాని రూపాణి ౦ ద్రమ్మాః ౧౪ పణాః ౯ కాకిణీ ౧ వరాటకాః ౬ వరాటకభాగాః 2/3

తాను వెడల్పు 3 హస్తములు, పొడవు 8 హస్తములు గలిగి, అందమైన పట్టువస్త్రములు 8 టికి వెల 100 నిష్కములగుచున్నవి. ½ హస్తము వెడల్పును 3½ హస్తములు పొడవును గల అట్టి 1 వస్త్రమునకు వెల యెంత యగును ?

ఫలమునకును పోలిక గలవను సారూప్యములైన ద్రమ్మకారములను అపవర్తనముచేసి బహురాశి ఘాతమును స్వల్పరాశి ఘాతముచే భాగింపగా

$$\frac{1\times7\times1\times100}{3\times8\times8\times2\times2}=\frac{7\times25}{3\times8\times8}=\frac{175}{192}$$ నిష్కములు ౦

ద్రమ్మములు $\frac{175\times16}{192}=\frac{175}{12}=14\frac{7}{12}$ అగుచున్నవి.

నవరాశికోదాహరణమ్

పిండే యే విశిఖాంగులాః కిల చతుర్వర్గాంగులా విస్తృతౌ
పట్టా దీర్ఘతయా చతుర్దశకరాస్త్రింశల్లభంతే శతం।
ఏతాదృక్ప్రతిపిండ ఏవ విశిఖా ఏషాం చతుర్విస్తృతాః
పట్టాస్తే వద మే చతుర్దశయుతాశ్చ లభంతే కియత్॥ ౩౭౧

న్యాసః

౧౨	౮
౧౬	౧౨
౧౪	౧౦
౩౦	౧౪
౧౦౦	

లబ్ధం రూప్యం నిష్కాః ౧౬ 2/3

తాను మందము 12 అంగుళములు వెడల్పు 16 అంగుళములు పొడవు 14 హస్తములు గలిగిన పట్టుములు (రత్న కంబళములు వంటివి) 30 టికి వెల 100 నిష్కములు అగుచున్నవి. అట్లే మందము 8 అంగుళములు వెడల్పు 12 అంగుళములు పొడవు 10 హస్తములు గల 14 పట్టములకు వెల యెంత యగును ?

పైపద్ధతి ప్రకారము $$\frac{8\times12\times10\times14\times100}{12\times16\times14\times30}=\frac{1\times1\times1\times1\times100}{1\times2\times1\times3}=$$

$$\frac{100}{6}=16\frac{2}{3},$$

ఏకాదశరాశికోదాహరణమ్।

పట్టా యే ప్రథమోదితప్రమితయో గవ్యూతిమాత్రే స్థితా
స్తేషామానయనాయ చేచ్ఛకటినాం ద్రమ్మాష్టకం భాటకం।
అన్యే యే తదనంతరం నిగదితా మానైశ్చతుర్వర్జితా
స్తేషాం కా భవతి త్రిభాటకమితిర్గవ్యూతిషట్కే వద॥ ౩౭౨

న్యాసః. [illegible]

౧౨	౮
౧౬	౧౨
౧౪	౧౦
౨౦	౧౪
౧	౬
౮	

[illegible]

$$\frac{8\times 12\times 10\times 14\times 6\times 8}{12\times 16\times 14\times 20\times 1}=\frac{1\times 1\times 1\times 1\times 6\times 8}{1\times 2\times 1\times 3\times 1}=\frac{6\times 8}{2\times 3}=8$$

[illegible]

ఇతి పంచరాశికాదికము 11 ప్రకరణము

—...—

12 ప్రకరణము.

భాండప్రతిభాండవ్యవహారము.

(వస్తువుమార్చి వస్తువుపుచ్చుకొనుట)

భాండప్రతిభాండకరణసూత్రం వృత్తార్ధమ్

[illegible]

[illegible]

[illegible]

120. [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

(5) [illegible]

ఉదాహరణమ్

[illegible]

న్యాసః ౧౬ | ౧ ... ౧౦౦ | ౩౦ ... ౧౦

ఇతి భాండప్రతిభాండవ్యవహారః

ఇతి శ్రీ ... లీలావత్యాం ... [illegible]

(1) ఉ॥ [illegible] మామిడిపండ్లు 300 వచ్చుచున్నవి. ఒక పణమునకు దానిమ్మపండ్లు 30 వచ్చుచున్నవి. మామిడిపండ్లకు దానిమ్మపండ్లకు [illegible] 10 మామిడిపండ్లకు ఎన్ని దానిమ్మపండ్లు వచ్చును ?

[illegible] 1 [illegible]. దానిమ్మపండ్లకెల 1 పణము. [illegible] మామిడిపండ్లకెల 16 పణములు, మామిడిపండ్లు 300. [illegible] దానిమ్మపండ్లు 30 [illegible] 1 పణము, [illegible] మామిడిపండ్లు 10 [illegible]

భాజకములు	మధ్యరాశి	గుణకములు
పణములు 16	మామిడిపండ్లు 10	పణములు 1
మామిడిపండ్లు 300		దానిమ్మపండ్లు 30

[illegible] మధ్యరాశిగుణకముల గుణకమును భాజకముల గుణకముచే భాగించగా $\frac{16 \times 10 \times 30}{1 \times 300} = 16$ దానిమ్మ పండ్లు వచ్చును.

(2) ఉదా:— ని॥ 100 లకు రు 2 లు కస్తూరి వచ్చుచున్నది. [illegible] కర్పూరము రు 5 లు ని॥ 15 లకు వచ్చుచున్నది. రు 3 ల కస్తూరికి కర్పూరము ఎన్ని పలములు వచ్చును ?

విపరీతక్రమము	భాజకములు	మధ్యరాశి	గుణకములు
	100	2	15
	3		5

[illegible] $\frac{100 \times 2 \times 5}{15 \times 3} = \frac{200}{9} = = 22\frac{2}{9}$ పలములు.

మూల్యఫలములకు పరివర్తనము చేసి భాజ్యభాజకములను [illegible] వ్రాయగా

భాజ్యములు	భాజకములు.
కర్పూరము రు 5 లకు	ని॥ 15 లు
ని॥ 100 లకు	రు 2 లు కస్తూరి
రు 3 ల కస్తూరికి	కర్పూరమెంత ?

ఇట్లు అగుచున్నది ?

121. ప్ర. [illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\frac{30 \times 16 \times 10}{300 \times 1} = 16$$ దానిమ్మపండ్లు అగుచున్నవి.

30 దానిమ్మపండ్లకు	1 పణము వెల
16 పణములకు	300 మామిడిపండ్లు
10 మామిడిపండ్లకు	దానిమ్మపండ్లెన్ని ?

(8) [illegible] ఉదాహరణము.

[illegible] 100 ల [illegible] ?

[illegible]

20 శేర్ల మినుములకు	15 శేర్ల శనగలు
40 శేర్ల శనగలకు	25 శేర్ల గోధుమలు
30 శేర్ల గోధుమలకు	20 శేర్ల బియ్యము.
100 శేర్ల బియ్యమునకు	మినుములెన్ని ?

[illegible]

$$\frac{20 \times 40 \times 30 \times 100}{15 \times 25 \times 20} = 40 \times 2 \times 4 = 320$$ శేర్ల మినుములు.

[illegible]

(1) [illegible]
(2) ,, [illegible]
(3) ,, [illegible]
(4) ,, [illegible]
(5) ,, [illegible]

[illegible]

[illegible]

(2) (4) [illegible]

3 వ పాదభేదమునందు [illegible]

5 వ పాదభేదమునందు [illegible]

[illegible] 10 [illegible] 300 [illegible]

$$\frac{30 \times 10 \times 16}{1 \times 300}$$ [illegible]

[illegible]

ప్రశ్నములు:—

(1) మూడుసంవత్సరములకు 6 ఎద్దులకు ... 5 ఎద్దులకు 11 ... అద్దెకిచ్చుచున్నది. ఒకగొల్లకు రూ 8—3—4 ... లు తెలియునని ఒకగొల్లను ... ఎంతకాలముంచుకొనును ?

(2) [illegible] ... 25 ... 6 ... (200 ...) రూ 42—8—0 లు అగుచున్నవి. ... 100 ... ఎంతకాలమగును ?

ఇది భాండప్రతిభాండవ్యవహారము

12 వ ప్రకరణము.

ఇది శ్రీమత్పిడపర్తి వంశదుగ్ధార్ణవ రాకా సుధాకరుండును శ్రీకౌండిన్య
సగోత్రపవిత్రుండును శేషాచల దైవజ్ఞశిరోమణి పుత్రుండును నగు
పూర్ణాద్యపైవజ్ఞ బుధేంద్రసేవ స్మృతీయ తనూజుండును
తెలుగుభాషాగత జ్యోతిశ్శాస్త్ర కృతపరిశ్రముండును నైన
శ్రీకృష్ణమూర్తిశాస్త్రి నామధేయ సత్ప్రథవిధేయునిచే
ప్రణీతంబైన లీలావతీగణితాంధ్రవ్యాఖ్యానమునందు
పరికర్మములుగల పూర్వార్ధము.

శ్రీరస్తు

లీలావతీ గణితము

ఉత్తరార్ధము.

మిశ్రవ్యవహారము — 13 ప్రకరణము.

122 ప్ర. ఇదివరలో పూర్వార్ధమందు త్రైరాశికము, త్రైరాశికమునకు సంబంధించిన పంచరాశికాదికము, భాండప్రతిభాండవ్యవహారమున్ను చెప్పబడినవి. సంకలనము మొదలు త్రైరాశికమువరకు చెప్పబడిన గణితమంతయు ప్రాయికముగ ... గణితప్రశ్నలందును ... చూచుటచే ... సంక్షిప్త చేయబడెను. ముందు చెప్పబోవు గణితములు ఒక్కొక్క విషయమును ... ఇతరప్రకరణముల సంబంధము విశేషముగ లేదని ... చెప్పబడినది. ... మిశ్రధనమును సంబంధించిన ... మిశ్రవ్యవహారమను ప్రకరణము చెప్పబడుచున్నది.

మిశ్రకవ్యవహారే కరణసూత్రం సార్ధవృత్తం.

(౧) ప్రమాణకాలేనహతం ప్రమాణం విమిశ్రకాలేనహతం ఫలంచ।
స్వయోగభక్తే చ పృథక్స్థితే తే మిశ్రాహతే మూలకలాంతరే స్తః॥

(౨) యత్పంచకద్విక ... సంయుతం ... అంతరం
స్యాత్। తత్॥

టీ॥ ప్రమాణం = ప్రమాణధనము ప్రమాణకాలేన = ప్రమాణకాలముచే హతం (గుణ్యం) = గుణింపబడి ... ప్రమాణఫలము ... విమిశ్రకాలేన = మిశ్రధనసంబంధమగు కాలముచే హతం (గుణ్యం) = గుణింపబడినవి. పృథక్స్థితే తే = వేరుగనుంచబడిన ... మిశ్రాహతే = మిశ్రధనము చేత గుణింపబడినవైన

వృద్ధియోగభక్తేన — ఆగుణనఫలములయోగముచే భాగింపబడినదియైన మూలఘ్న కాలాంతరేణ—మూలధనముచే కలాంతరము (వడ్డీపాటు) వృత్తిః—అగుచున్నవి.

వాక్యా—యేక ఇష్టకల్పితకాలః = ఇష్టకర్మయను గణితపద్ధతి (ఒ వ్రి) వలనను మూలం = మూలధనము మిశ్రితే — మిశ్రధనమునుండి చ్యుతం — తీసి వేయబడినట్లైన కల్పు — ఇదియే కలాంతరం స్యాత్ — వృద్ధిధనమగును.

133 శ్రీ. తా. ప్రమాణధనము ప్రమాణకాలము ప్రమాణఫలము తెలి యును. ఇష్టకాలమున్ను తెలియును. ఇష్టమగు మూలధనమెంతయో దానికి ఇష్టకాలమునకు వృద్ధి (వడ్డీ) ధనమెంతయో యోగము తెలియును. ఇదియే మిశ్రధనము. కావున మిశ్రధనమును సంబంధించినదియగుటచే ఇష్టకాలము మిశ్ర కాలమని చెప్పబడెను. ఈమిశ్రధనమువలన వృద్ధిమూలములను తెలియుట.

(1) ప్రమాణకాలముచే ప్రమాణధనమునుగుణించి (ప్రకా × ప్రధ) ఒకచో వ్రాసికొనుము. మిశ్రకాలముచే ప్రమాణఫలమునుగుణించి మరియొకచో (మికా × ప్రఫ) నుంచుము. పైగుణనఫలములచే వేర్వేర మిశ్రధనమును గుణించి గుణనఫలముల యోగముచే భాగింపవలెను. క్రమముగ లబ్ధములు మూలధనము, వృద్ధియును నగుచున్నవి.

(2) లేక ఇక్కడ ఇష్టధనమునుగల్పించి ఆయిష్టధనమునకు మిశ్రకాలమునందు వృద్ధిధనము ఇష్టధనముతో కలిపి ఆమొత్తము ఇష్టమిశ్ర ధనమని తెలియును. పిమ్మట ఇష్టమిశ్రధనమునకు ఇష్టధనము మూలధనముగా మిశ్రధనమునకు యెంత మూలధనమగును? అని త్రైరాశికముచే మూలధనము తెలిసి మిశ్రధనమువలన నీదిచేయగా మిశ్రధనమునందలి వృద్ధి యగును. ఇట్లే త్రైరాశిక ముచే వృద్ధియు తెలియును.

ఉద్దేశకః

పంచకేన శతేనాబ్దే మూలం స్వం సకలాంతరం
సహస్రం చేత్పృథక్తత్ర వద మూలకలాంతరే ॥౧౩॥

న్యాసః

౧	౧౨
౧౦౦	౧౦౦౦
౫	

లబ్ధక్రమేణమూల కలాంతరే ౬౨౫। ౩౭౫

అథవా ఇష్టకర్మణా కల్పితమిష్టం రూపం ౧ ఉద్దేశకాలాపవది ష్టరాశితిత్ర్యాదికరణేనదయాజన్యస్వత్ప్రేకలాంతరం $\frac{3}{5}$ ఏతద్యుతేనరూపేణ $\frac{8}{5}$ నృష్టేః ౧౦౦౦ రూపగుణోర్ధక్తైలబ్ధం మూలధనం ౬౨౫ ఏతన్మిశ్రాత్ ౧౦౦౦ చ్యుతం కలాంతరం ౩౭౫

ఉ॥ ఉదా॥ ఒకనెలకు రూ 100 లకు రూ 5-0-0 లు వడ్డీ చొప్పున సంవత్సరమునకు అనగా 12 మాసములకు అసలువడ్డీలమొత్తము రూ 1000 లు అయినయెడల అసలెంత? వడ్డియెంత? ఇందు ప్రకా = 1 నె॥, ప్రధ = 100, ప్రఫ = 5 మిశ్రకా = 12 నె, మిధ = 1000

మొత్తముపాధానముగ :— (1) ప్రకారముచే.

(1) ప్రకా × ప్రధ = 1 × 100 = 100 (2) మికా × ప్రఫ = 12 × 5 = 60

(3) వీటియోగము (ప్రకా × ప్రధ) + (మికా × ప్రఫ) = 100 + 60

పై (1) (2) గుణనఫలములను మిశ్రధనము రూ 1000 లచే వేర్వేర గుణించి యోగము (3) చే భాగింప మూలధనము వృద్ధియు వచ్చును. కావున

$$\text{అసలు} = \frac{(\text{ప్రకా} \times \text{ప్రధ}) \times \text{మిధ}}{(\text{ప్రకా} \times \text{ప్రధ}) + (\text{మికా} \times \text{ప్రఫ})} = \frac{100 \times 1000}{160} = \frac{10000}{16} = 625$$

$$\text{వడ్డీ} = \frac{\text{ప్రఫ} \times \text{మికా} \times \text{మిధ}}{(\text{ప్రకా} \times \text{ప్రధ}) + (\text{మికా} \times \text{ప్రఫ})} = \frac{60 \times 1000}{160} = \frac{6000}{16} = 375$$

(2) ప్రకారము, ఇష్టధన = 1 ఇందులకు 12 మాసములకు వడ్డీ మూడు రాశికముచే $\frac{12 \times 5 \times 1}{1 \times 100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ దీనిని ఇష్టధనములోకలుప $\frac{1}{1} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

పిమ్మట (101 వ్రి సూ) ఇష్టాంశము 1 చే వృష్టమగు మిశ్రధనము 1000 ను గుణించి ఈయిష్టమిశ్రధనము $\frac{8}{5}$ చే భాగించ 625 మూలధనము, దీనిని మిశ్రధనము వలన తీసివేయగా 375 వృద్ధిధనము

ఉపపత్తి :— (1) ప్రకారము త్రైరాశికములచే సాధ్యమగుచున్నది ఎట్లనగా నె 1 కికి (రూ 100 లకు) వడ్డీ రూ 5 లు, నె 12 లకు ఎంత

$\frac{5\times 12}{1}$ అని రూ 100 లకు 12 నెలలకు వడ్డీయగుచున్నది. దీనిని అసలు 100 రూపాయలతో కలుపగా 160 మిశ్రధనము. ఇందు అసలు రూ 100 లు అయినచో మిశ్రధనము రూ 1000 లలో అసలెంత? $\frac{100\times 1000}{160}$ = 625 మూలధనము.

ఇట్లు రూ 160 లలో వడ్డీ రూ 60 లు అయినచో రూ 1000 లలో వడ్డీ యెంత? $\frac{60\times 1000}{160}$ = 375 దీనినే అవ్యక్తవిధానముచే చూపగా :—

$\frac{\text{ప్రఫ}\times\text{ఇకా}}{\text{ప్రకా}}$. మిశ్రధనమందు ప్రమాణధనమునకగు ఫలము. దీనిని "ప్రధన" [illegible]

కలుపగా $\frac{\text{ప్రఫ}\times\text{ఇకా}}{\text{ప్రకా}}+\frac{\text{ప్రధ}}{1}=\frac{\text{ప్రఫ}\times\text{ఇకా}}{\text{ప్రకా}}+\frac{\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా}}{\text{ప్రకా}}$ ఈయోగము

మిశ్రమందలి ప్రమాణధనమునకగు మిశ్రధనము = ప్రమిధ.

అనుపాతము ప్రమిధ : ప్రధ :: మిధ : మిశ్రధనమందలి మూలధనము.

ఇందు ప్రమిధ = $\frac{\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా}}{\text{ప్రకా}}$

ఇట్లు ప్రమిధ : $\frac{\text{ప్రఫ}\times\text{ఇకా}}{\text{ప్రకా}}$ :: మిధ : మిశ్రధనమందలి వడ్డీ.

$$\therefore \text{మిధ}\times\frac{\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా}}{\text{ప్రకా}}\times\frac{\text{ప్రకా}}{(\text{ప్రఫ}\times\text{ఇకా})+(\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా})}=$$

$$\frac{\text{మిధ}\times(\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా})}{(\text{ప్రఫ}\times\text{ఇకా})+(\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా})}=\text{మూలధన}$$

$$\text{ఇట్లు మిధ}\times\frac{\text{ప్రఫ}\times\text{ఇకా}}{\text{ప్రకా}}\times\frac{\text{ప్రకా}}{(\text{ప్రఫ}\times\text{ఇకా})+(\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా})}=$$

$$\frac{\text{మిధ}\times\text{ప్రఫ}\times\text{ఇకా}}{(\text{ప్రఫ}\times\text{ఇకా})+(\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా})}=\text{వృద్ధి}.$$

ఇట్లు పైసూత్రము [illegible] యగుచున్నది.

రెండవప్రకారము ఇష్టకర్మ (101 ప్ర) యొక్క ఉపపత్తి చేతనే స్పష్టమగుచున్నది.

ప్రశ్నములు.

(1) [illegible] 1% రూ 100 లకు వడ్డీ రూ 1-4-0 లు [illegible] 7½ మాసములకు రూ 78-0-0 లకు అసలెంత ? వడ్డీ యెంత ?

(2) [illegible] రూ 100 లకు రూ 10-0-0 లు వడ్డీ [illegible] సం 2 మా 3 రో 18 లకు రూ 207 లలో అసలెంత ? వడ్డీయెంత?

మిశ్రాంతర్గతకరణసూత్రం వృత్తం.

అథ ప్రమాణైర్గుణితాః స్వకాలా వ్యతీతకాలఘ్నఫలోద్ధృతాస్తే।
స్వయోగభక్తాశ్చ విమిశ్రనిఘ్నాః ప్రయుక్తఖండాని పృథగ్భవన్తి॥ [illegible]

టీ॥ [illegible]

194 ప్ర. (1) వడ్డీవ్యాపారము చేయు వర్తకుడు [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

ఉదాహరణ.

యత్పంచకద్వికచతుష్కశతేన దత్తం ఖండైస్త్రిభిర్గణక నిష్కశతం మయాఽసీత్। మాసేషు సప్తదశపంచసు తుల్యమాప్తం ఖండత్రయేఽపి హి ఫలం వద ఖండసంఖ్యామ్॥ ౯౪.

న్యాసః	౧	౭	౧	౧౦	౧	౫
	౧౦౦		౧౦౦		౧౦౦	
	౫		౩		౪	

మిశ్రధనం చాత్ర ప్రయోగః $\frac{౨౩౫}{౨౧}$ లబ్ధాని యథాక్రమం ఖండాని

౨౪, ౨౮, ౪౨ పంచరాశికవిధినా లబ్ధం సమకాలాంతరం $\frac{౪౨}{౫}$

ఒకనికి 94 రూపాయలుండెను. అతడు నెల 1 టికి రూ 100 లకు వడ్డీ రూ 5 లు చొ॥ 7 నెలలకు కొంతధనమును ఇచ్చెను. నెల 1 కి రూ 100 లకు వడ్డీ రూ 3 లు చొ॥ కొంతధనమును 10 నెలలకు ఇచ్చెను. మిగిలిన ధనమును నెల 1 టికి రూ 100 లకు వడ్డీ రూ 4 లు చొ॥ 5 నెలలకు ఇచ్చెను. ఆయాకాలములకు ఆయావడ్డీప్రకారము ఇచ్చిన మూడుభాగములకు ధనఖండములకును సమానముగా వడ్డీవచ్చెను. ఆయాఖండపరిమాణములను చెప్పుము. (మూలమునందు నిష్కములనగా ప్రస్తుతవ్యవహారమునుబట్టి రూపాయలని వ్రాయబడెను.)

ఇందు ప్రకా=1 నెల, ప్రధ=100 రూ, ప్రధనపరిమాణఫలము = ప్రఫ=5, ప్రథమవ్యతీతకాలము (ఇవ్వబడినకాలము)=ప్రవ్యకా=7, ద్వితీయప్రధ=ద్విప్రఫ=3, ద్వివ్యకా=10, తృప్రధ=4, తృవ్యకా=5.

$$(1)\ \frac{\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా}}{\text{ప్రవ్యకా} \times \text{ప్రప్రఫ}} = \frac{100 \times 1}{7 \times 5} = \frac{100}{35} = \frac{20}{7}$$

$$(2)\ \frac{\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా}}{\text{ద్వివ్యకా} \times \text{ద్విప్రఫ}} = \frac{100 \times 1}{10 \times 3} = \frac{100}{30} = \frac{10}{3}$$

$$(3)\ \frac{\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా}}{\text{తృవ్యకా} \times \text{తృప్రఫ}} = \frac{100 \times 1}{5 \times 4} = \frac{100}{20} = 5$$

వీటియోగము

$$\frac{20}{7} + \frac{10}{3} + \frac{5}{1} = \frac{235}{21}$$

త్రైరాశికముచే వచ్చిన లబ్ధములను వేర్వేర మిశ్రధనముచే గుణించి వాటి యోగము $\frac{235}{21}$ చే భాగించిన ధనఖండములగును. కావున మిశ్రధనము 94 అగుటచే

$$\frac{20}{7} \times \frac{94}{1} \times \frac{21}{235} = \frac{20 \times 94 \times 3}{235} = \frac{5640}{235} = 24 \text{ ప్రథమధనఖండము.}$$

$$\frac{10}{3} \times \frac{94}{1} \times \frac{21}{235} = \frac{10 \times 94 \times 7}{235} = \frac{6580}{235} = 28 \text{ ద్వితీయ ధనఖండము}$$

$$\frac{5 \times 94 \times 21}{235} = \frac{94 \times 21}{47} = 2 \times 21 = 42 \text{ తృతీయధనఖండము}$$

ఈ మూడుధనఖండములకును వేర్వేరుగ ప్రశ్నప్రకారము వృద్ధినిసాధించిన 8⅖ సమముగనే వచ్చుచున్నది.

ఉపపత్తి:— ఈప్రశ్నయందు అన్ని ఖండములకును వృద్ధిసమానమగుటచే ప్రశ్నప్రకారము ప్రమాణధనమునకు వృద్ధినిసాధించి దానిచే రూపాయ (1 రూ) వృద్ధియందు వచ్చుధనఖండముల గమించి వాటియోగముచే ఆయాధనఖండములను వచ్చిన మిశ్రధనముచే విభజించు ధనఖండములగును అను త్రైరాశికముచేయగా అభీష్టధనఖండములగును. కావున,

$$(1)\ \frac{\text{ప్రఫ} \times \text{వ్యకా}}{\text{ప్రకా}} = \text{వ్యఫం}$$

ఆయావ్యతీతకాలములబట్టి త్రైరాశికముచే ఆయావ్యతీతకాలములందు ప్రమాణధనమునకు ఆయాపరిమాణఫలమునకును సంబంధించి ఫలమునుపొందుచున్నది. అట్లుచేయ గణించగా (1) ప్రవ్య సం ఫ (2) ద్వివ్య సం ఫ (3) తృవ్య సం ఫ. ప్రమాణధనమునకైన వ్యతీతకాలసంబంధఫలముచే ప్రమాణధనమునకు రూపా (1 టి) మితవ్యతీతకాలసంబంధఫలముచే మూలధన మెంతయగును? ఈ త్రైరాశికముచే రూపాఫలమునకు మూలధనములు.

$$(1)\ \frac{\text{ప్రధ} \times 1}{\text{ప్రవ్యసంఫ}} = \frac{\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా}}{\text{ప్రప్రఫ} \times \text{ప్రవ్యకా}} \quad (2)\ \frac{\text{ప్రధ} \times 1}{\text{ద్వివ్యసంఫ}} = \frac{\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా}}{\text{ద్విప్రఫ} \times \text{ద్వివ్యకా}}$$

$$(3)\ \frac{\text{ప్రధ} \times 1}{\text{తృవ్యసంఫ}} = \frac{\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా}}{\text{తృప్రఫ} \times \text{తృవ్యకా}}$$

ఇపుడు (1) + (2) + (3) = యో. అను కొందము. పైన్యవహారములను మిశ్రధనముచేగుణించి యోగముచేభాగించిన వేర్వేర ధనఖండములగును.

[illegible]

125. [illegible]

[illegible]

[illegible] రూ 100 [illegible] రూ 5 [illegible]

[illegible] 200 [illegible] 100 [illegible]

[illegible] 100 [illegible] 100 [illegible] 300 [illegible] 200 [illegible] 400 [illegible]

[illegible] 200 — 100 = 100 [illegible] 100 [illegible]

[illegible]

[illegible] రూ 100 [illegible]

మిశ్రాంతరేకరణసూత్రం.

ప్రక్షేపకా మిశ్రహతా విభక్తాః ప్రక్షేపయోగేన పృథక్ఫలాని [illegible]

[illegible]

126 వ్రి. (1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

ఉద్దేశకః.

పంచాశదేకసహితా గణకాష్టషష్టిః పంచోనితా నవతిరాదిధనాని యేషాం। ప్రాప్తా విమిశ్రితధనం త్రిశతీ త్రిభిస్తై [illegible] ౯౩॥

న్యాసః. ప్రక్షేపకాః ౫౧, ౬౮, ౮౫ మిశ్రధనమ్ ౩౦౦ [illegible] ౭౫, ౧౦౦, ౧౨౫ [illegible] ౨౪, ౩౨, ౪౦ అథవా మిశ్రధనం ౩౦౦ [illegible] ౨౦౪ [illegible]

[illegible] ౨౮, ౭౩, ౮౦.

ఉ॥ [illegible] 1 [illegible] రూ 51 లు. [illegible] రూ 68 లు. [illegible] రూ 85 లు [illegible] రూ 300 లు [illegible]. [illegible] ఎంత ?

(1) [illegible] 51, 68, 85 [illegible] 204 [illegible].

$$\therefore (1)\ \frac{[illegible] \times [illegible]}{[illegible]} = \frac{51 \times 300}{204} = 75$$ [illegible]

[illegible] 51 [illegible] రూ 24 లు. [illegible]

$$(2)\ \frac{[illegible] \times [illegible]}{[illegible]} = \frac{68 \times 300}{204} = 100 \therefore 100 - 68 = 32$$ [illegible]

$$(3)\ \frac{[illegible] \times [illegible]}{[illegible]} = \frac{125 \times 300}{204} = 125 \therefore 125 - 85 = 40$$ [illegible]

(2) [illegible] $= 300 - 204 = 96$ [illegible]

$$\therefore \frac{96 \times 51}{204} = \frac{8 \times 51}{17} = 8 \times 3 = 24$$ [illegible]

$$\frac{96 \times 68}{204} = 32, \qquad \frac{96 \times 85}{204} = 40.$$ [illegible]

[illegible] ? [illegible]

[illegible]

ప్రశ్నలు

(1) [illegible] (1) [illegible] రూ 75 లు (2) [illegible] రూ 87 లు. (3) [illegible] రూ 63 లు (4) [illegible] రూ 45 లు [illegible] రూ $108\frac{1}{3}$ లు [illegible] ? [illegible] ?

[illegible] $108\frac{1}{3}$ [illegible] రూ 150 లు [illegible] రూ $108\frac{1}{3}$ లు [illegible] రూ $41\frac{2}{3}$ లు [illegible].

(2) [illegible] రూ 100 లు రూ 18 లు [illegible] $333\frac{1}{3}$ లు [illegible] ?

(3) [illegible] 14 [illegible] 57 [illegible] ?

[illegible]

[illegible]

[illegible] = [illegible] = [illegible] = [illegible]

127. ప్ర. [illegible]

(1) [illegible]

(2) [illegible] 1 [illegible]

ఉదాహరణమ్.

యే నిర్ఝరా దినదినార్ధతృతీయషష్ఠైః సంపూరయంతి హి పృథక్పృథగేవ ముక్తాః। వాపీం యదా యుగపదేవ సఖే విముక్తాః తే కేన వాసరలవేన తదా వదాశు ॥ ౮౮॥

న్యాసః $\frac{౧}{౧}$, $\frac{౧}{౨}$, $\frac{౧}{౩}$, $\frac{౧}{౬}$ లబ్ధో వాపీపూరణకాలో

దినాంశః $\frac{౧}{౧౨}$

తా॥ ఒక బావిలోనికి 4 జలమార్గములు గలవు. ఒక జలమార్గమును విడచినచో బావి ఒకదినమునకు నిండును. రెండవజలమార్గమును ప్రత్యేకముగ విడచినచో బావి $\frac{1}{2}$ దినములో నిండును. ఇట్లు మూడవజలమార్గము వలన $\frac{1}{3}$ దినములో నిండును. నాలవదానివలన $\frac{1}{6}$ దినములో నిండును. ఈ జలమార్గములను నాల్గిటిని ఒక్కసారి విడచినచో ఆ బావి ఏ కాలములో నిండును? మిత్రమా శీఘ్రముగ చెప్పుము.

(1) టీకా:— ఇచట జలమార్గములు 4. అవి వేర్వేర బావినినింపు కాలములు $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ అనునవి దినావయవములను తెలియజేయునట్టి సంఖ్యలై యున్నవి. ఈ సంఖ్యలయందలి హారములు 1, 2, 3, 6 లను క్రమముగా అంశముల చే భాగించ $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{1}$ వీటి యోగము $\frac{12}{1}$ దీనిచే 1 దినిభాగించ $\frac{1}{12}$ ఈ దినావయవకాలములో 4 మార్గములను ఒకసారి విడచుటచే 1 బావి నిండును.

ఉపపత్తి:— మొదట ప్రతిజలమార్గమును విడచుటచే ఒకదినమున కెన్ని బావులను నిండించునదియు తెలిసికొని ఒకదినమునకెన్ని బావులు నిండునో ఒకబావి యెంతకాలములో నిండునని త్రైరాశికముచే సూత్రోపపత్తి తెల్పబడు చున్నది.

మొదటి జలమార్గము 1 దినమునకు ఒక బావిని నిండించును.

రెండవజలమార్గము $\frac{1}{2}$ నకు బావి 1 అని గాన 1 దినమునకు 2 బావులను

మూడవమార్గము $\frac{1}{3}$ నకు బావి 1 అని గాన 1 దినమునకు 3 బావులను

నాలవమార్గము $\frac{1}{6}$ నకు బావి 1 అని గావున 1 దినమునకు 6 బావులను నిండించును. ఈ త్రైరాశికములు చేయుటచే అంశసంఖ్యలచే హారసంఖ్యలను భాగిం

చుటయగుచున్నది. అన్నిటి యొక్కయు యోగము 12, నాలుగుమార్గములును 1 దినమునందు విడచుటచే నిండు బావులసంఖ్య అగుచున్నది.

ఇన్ని బావులు నిండుటకు 1 దినమైనచో 1 బావి నిండుటకు ఎంతకాలమగు? $\frac{1\times1}{12}$ దీని చేతనములచే భాగించబడినహారములయోగముచే 1 అని భాగించుటయే యగుచున్నది.

(2) ఈ యుపపత్తిననుసరించి జలమార్గమును సంబంధించిన ప్రశ్నములన్నియు ఈ సూత్రముచే సమర్థింపబడగలవు.

ఒక తటాకమునందు రెండు జలాగమమార్గములును 1 జలనిర్గమమార్గమును గలవు. మొదటి జలాగమమార్గము $\frac{1}{2}$ దినములో తటాకమును నిండించును. రెండవ జలాగమమార్గము $\frac{1}{3}$ దినములో నిండించును. జలనిర్గమమార్గమును విడచినచో ఆ తటాకపు నీరు దినములో పోవును. మూటిని విడచినచో ఆ తటాక మెంతకాలమునకు నిండును? త్రైరాశికము.

$\frac{1}{2}$ దినమునకు 1 తటాకము నిండుమార్గముచే దినమునకు 2 తటాకములు

$\frac{1}{3}$ దినమునకు 1 తటాకము నిండుమార్గముచే దినమునకు 3 తటాకములను నిండును.

జలనిర్గమమార్గము 1 దినము ప్రత్యేకముగ విడచినచో నాలుగు తటాకముల నీరు పోవును. రెండు జలాగమమార్గములు 2 ను విడచినచో దినము 1 టికి 5 తటాకములు నిండును. నిర్గమమార్గము విడచినచో 1 దినమునకు 4 తటాకములు పోవును. కావున దినము 1 టికి మూడిటిని విడచినచో 5 — 4 = 1 తటాకమే నిండును.

విశేషము— మిశ్రప్రమాణముచే నడుమ అంశములచే హారములభాగించి నిండించుటవలన సంబంధముగు లబ్ధముల యోగముతో శోధింపవలెను. సంఖ్యల సంబంధముగు లబ్ధముల యోగమును తీసివేసి అంతరముచే 1 అని భాగింపవలయును. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, నిర్గమకాలము $\frac{1}{4}$ అంశములచే హారములభాగించి లబ్ధముల యోగాంతరము చేయగా $\frac{2}{1}+\frac{3}{1}-\frac{4}{1}=\frac{5}{1}-\frac{4}{1}=1$ దీనిచే ఒకటిని భాగించ 1 టి తటాకపూరణ దినసంఖ్య.

[illegible]

128. [illegible]

[illegible]

[illegible] $3\frac{1}{?}$ [illegible] 8 [illegible] 13 [illegible]

[illegible] $3\frac{1}{7}$ [illegible] 8 [illegible] 13 [illegible] 2 [illegible] 1 [illegible] 13 [illegible]

$$\frac{1 \times 2}{\frac{?}{?}} = \frac{?}{?} \times 2 \times \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{1 \times 1}{8} = \frac{1}{8}$$ [illegible]

$$\frac{4}{7} + \frac{1}{8} = \frac{32 + 7}{56} = \frac{39}{56}$$

[illegible]

$$\frac{4}{7} \times \frac{13}{64} \div \frac{39}{56} = \frac{4}{7} \times \frac{13}{64} \times \frac{56}{39} = \frac{1}{6}$$ [illegible]

$$\frac{1}{8} \times \frac{13}{64} \div \frac{39}{56} = \frac{1}{8} \times \frac{13}{64} \times \frac{56}{39} = \frac{7}{192}$$ [illegible]

[illegible] 2, 1 [illegible]

$$\frac{2}{1} \times \frac{13}{64} \div \frac{39}{56} = \frac{2 \times 13 \times 56}{1 \times 64 \times 39} = \frac{7}{12}$$ [illegible]

$$\frac{1}{1} \times \frac{13}{64} \div \frac{39}{56} = \frac{2 \times 13 \times 56}{1 \times 64 \times 39} = \frac{7}{24}$$ [illegible]

[illegible] $\frac{1}{6}$ — 2 [illegible] 2 [illegible] $13\frac{1}{3}$ [illegible]

[illegible] $\frac{7}{192}$ — 2 [illegible] $8\frac{2}{3}$ [illegible]

[illegible] 1 [illegible] 2 [illegible] 8 [illegible] 1 [illegible] 1 [illegible] (1 [illegible]) [illegible]

[illegible] 2 [illegible] 1 [illegible]

[illegible]

[illegible] ॥ ౪౭ ॥

[illegible]

[illegible] 1 [illegible] $\frac{1}{?}$ [illegible] 1 [illegible] $\frac{1}{16}$ [illegible] 2 [illegible] 1 [illegible] 16 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $32 = $ [illegible], $\frac{1}{8} = $ [illegible], $\frac{1}{4} = $ [illegible] [illegible] $= 1$, [illegible] $= 1$, [illegible] $= \frac{1}{2}$ భాగములు. [illegible] $= 1$, [illegible] $= 16$, [illegible] $= 8$ [illegible]

[illegible] $\frac{32 \times 1}{1} = 32$, [illegible] $\frac{\frac{1}{2} \times 4}{1} = 2$, [illegible] $\frac{\frac{1}{2} \times 8}{2} = 2$

[illegible] $32 + 2 + 2 = 36$

[illegible]

$\frac{32 \times 16}{36} = \frac{8 \times 16}{9} = \frac{128}{9} = 14\frac{2}{9}$ [illegible]

[illegible] $\frac{2 \times 16}{36} = \frac{2 \times 4}{9} = \frac{8}{9}$ [illegible] $\frac{8}{9}$.

[illegible]

$\frac{1 \times 16}{36} = \frac{4}{9}$ [illegible] $\frac{16 \times 16}{36} = \frac{64}{9}$ [illegible] $\frac{8 \times 16}{36} = \frac{32}{9}$

[illegible]

రత్నమిశ్రీకరణసూత్రం వృత్తమ్.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

129. [illegible]

(2) [illegible]

ఉదాహరణం

[illegible]

[illegible]

10 [illegible] 100 [illegible] 5 [illegible]

[illegible]

[illegible] (1) [illegible] 4 [illegible] 1 [illegible] 8 — 4 = 4 [illegible], 10 — 4 = 6 [illegible] 100 — 4 = 96 [illegible] 5 — 4 = 1 [illegible]

[illegible] $\frac{4 \times 6}{1} = 24$, [illegible] 16, [illegible] 1, [illegible] 96 [illegible] (1) $24 \times 8 = 192$

(2) $16 \times 10 = 160$ (3) $100 \times 1 = 100$ (4) $96 \times 5 = 480$ [illegible]

(1) $(24 \times 5) + 16 + 1 + 96 = 120 + 16 + 1 + 96 = 233$ [illegible]

(2) $16 \times 7 + 24 + 1 + 96 = 112 + 24 + 1 + 96 = 233$ [illegible]

[illegible] 4, 6, 96, 1 [illegible] 96 [illegible]

(3) [illegible] $4 \times 6 \times 96 \times 1 = 2304$ [illegible] 576, [illegible] 384, [illegible] 24, [illegible] 2304 [illegible] 5503 [illegible]

[illegible]

[illegible] 5 [illegible] 1 [illegible] 1 [illegible] 1 =
[illegible] 1 [illegible] 7 [illegible] 2 [illegible] 1 =
[illegible] 1 [illegible] 1 [illegible] 7 [illegible] 1 =
[illegible] 1 [illegible] 1 [illegible] 1 [illegible] 2

[illegible]

[illegible] ॥ 30 ॥

[illegible]

130. [illegible] (1) [illegible]

[illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

ఉదాహరణము

[illegible]

వర్ణాః	౧౩	౧౨	౧౧	౧౦
మాషాః	౧౦	౪	౨	౪

[illegible] ౧౨ [illegible] ౨౦ [illegible] ౧౫, [illegible] ౧౬ [illegible]

[illegible] 13 [illegible] 10 [illegible] 12 [illegible] 4 [illegible] 11 [illegible] 2 [illegible] 10 [illegible] 4 [illegible]

[illegible] 20 [illegible] 16 [illegible] 12 [illegible]

[illegible] $(13 \times 10) + (12 \times 4) + (11 \times 2) + (10 \times 4) =$ $130 + 48 + 22 + 40 = 240$ [illegible] 20, [illegible] $\frac{240}{20} = 12$ [illegible]

[illegible] 12 [illegible] $\frac{240}{12} = 20$ [illegible] 16 [illegible] $\frac{240}{16} = 15$ [illegible] 16 [illegible] $\frac{240}{16} = 15$ [illegible]

[illegible]

[illegible] 13 [illegible] 10 [illegible] 1 [illegible] $\frac{13 \times 10}{1}$, [illegible]

[illegible]

$\frac{[illegible] \times [illegible]}{1}$, $\frac{[illegible] \times [illegible]}{1}$, $\frac{[illegible] \times [illegible]}{1}$, $\frac{[illegible] \times [illegible]}{1}$, [illegible]

[illegible] సువర్ణము 1 చే [illegible] సువర్ణము [illegible] ఇది [illegible]

$\frac{\text{యో} \times 1}{\text{వ}}$ = [illegible] ∴ $\frac{\text{యో}}{\text{ఇష్టవర్ణ}}$ = ఇదా అనుచున్నది

ఈ కారణముచే [illegible] బంగారము [illegible] చెప్పబడినది [illegible]

అథ వర్ణజ్ఞానాయ కరణసూత్రం వృత్తం

స్వర్ణైక్యనిఘ్నా ద్యుతిజాతవర్ణా త్సువర్ణతద్వర్ణవధైక్యహీనాత్।
అజ్ఞాతవర్ణాగ్ని [illegible] ప్రమాణమ్॥ ౫౧

[illegible] = [illegible]

181. ప్ర. [illegible] బంగారము [illegible] వన్నె తెలియును [illegible]

ఉదాహరణమ్

దశేశవర్ణా వసునేత్రమాషా అజ్ఞాతవర్ణస్య షడేతదైక్యే।
జాతం సఖే ద్వాదశకం సువర్ణ మజ్ఞాతవర్ణస్య వద ప్రమాణమ్॥ ౫౦॥

న్యాసః. $\frac{10}{8} \mid \frac{11}{2} \mid \frac{?}{6}$ [illegible] వర్ణః 12 [illegible]

ఓ మిత్రుడా! 10 వన్నెగల బంగారము 8 మాడలును 11 వన్నెగల బంగారము 2 మాడలును మరియొక బంగారము 6 మాడలునున్నది. దానివన్నె తెలియదు. మొత్తము బంగారముయొక్క వన్నె 12, ఆ వన్నె తెలియని బంగారముయొక్క వన్నెను చెప్పుము.

[illegible] = యోవ = 12. స్వర్ణైక్యము = సుయో = 16. [illegible] = యో, అజ్ఞాతవర్ణసువర్ణపరిమాణం = అసుప, అజ్ఞాతవర్ణ = అవ, [illegible]

$$\frac{\text{యోవ} \times \text{సుయో} - \text{యో}}{\text{అసుప}} = \text{అవ} = \frac{12 \times 16 - (10 \times 8 + 11 \times 2 + 0 \times 0)}{6} =$$

$$\frac{192 - 102}{6} = \frac{90}{6} = 15$$ ఇదియే వన్నె తెలియని బంగారముయొక్క వన్నె అయినది.

ఉపపత్తి :— తెలియని వర్ణము = యా అనుకొందము. అప్పుడు పూర్వసూత్రముచే

$$\text{యోవ} = \frac{10 \times 8 + 11 \times 2 + \text{యా} \times 6}{\text{సుయో}} \therefore 10 \times 8 + 11 \times 2 + \text{యా} \times 6$$

$$= \text{యోవ} \times \text{సుయో}$$

$$\therefore \text{యా} \times 6 = \text{యోవ} \times \text{సుయో} - (10 \times 8 + 11 \times 2)$$

$$\therefore \text{యా} = \frac{\text{యా} \times 6}{6} = \frac{\text{యోవ} \times \text{సుయో} - (10 \times 8 + 11 \times 2)}{6}$$

ఇచట 6 ఇది అజ్ఞాతవర్ణసువర్ణపరిమాణము [illegible]

సువర్ణజ్ఞానాయ కరణసూత్రం వృత్తం

స్వర్ణైక్యనిఘ్నో యుతిజాతవర్ణః సువర్ణతద్వర్ణవధైక్యహీనః।
అహేమవర్ణాగ్ని [illegible]॥ ౫౩॥

[illegible]

ఉదాహరణం

[illegible]

16—12 = 4, 12—10 = 2 [illegible]

[illegible]

$$\frac{\text{యా} \times \text{అ} + \text{కా} \times \text{క}}{\text{యా} + \text{కా}} = \text{యోగ}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\therefore \text{[illegible]} = \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$$

[illegible] $= \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$

ఇట్లు $= \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(1) ఉదాహరణము

[illegible]

18, 16, 11, 9 వర్ణములుగల బంగారములు కరిగించి 13 వన్నెగల బంగారు [illegible] ఇందు 18, 11 [illegible] సాధ్యవర్ణము 13 కావున దానిచే 18—13 = 5 అట్లు 13—11 = 2 [illegible] 1 [illegible] 18 వర్ణముగల బంగారము 2 మాషములు 11 వన్నెగలది 5 మాషములు ఇట్లు 16, 9 [illegible] 16—13 = 3 అట్లు 13 — 9 = 4 కావున 16 వన్నెగలది 4 మాషములు 9 వన్నెగలది 3 మాషములు [illegible].

(2) ఉదాహరణము

[illegible]

[illegible] 11 [illegible] 9 [illegible] 7 [illegible] 14 [illegible] 12 [illegible] 1 [illegible] 14, 11 [illegible] 1, 3 ఇట్లు 14, 9 [illegible] 3, 2 ఇట్లు 14, 7 [illegible] 5, 2 ఇట్లు [illegible] 14 వర్ణముగల బంగారమునకు 1, 3, 5 [illegible] 9 కావున 11, 9, 7, 14 [illegible] 2, 2, 2, 9 [illegible].

[illegible] (180 [illegible]) [illegible]

వ్యక్తిభేదగణితము

అథ ఛందశ్చిత్యా[illegible] శ్లోకత్రయం

ఏకాద్యేకోత్తరా అంకా వ్యస్తా భాజ్యాః క్రమస్థితైః ।
పరః పూర్వేణ సంగుణ్యస్తత్పరస్తేన తేన చ ॥ ౫౮ ॥
ఏకద్విత్ర్యాదిభేదాః స్యురిదం సాధారణం స్మృతమ్ ।
ఛందశ్చిత్యుత్తరే ఛందస్యుపయోగోఽస్య తద్విదామ్ ॥ ౫౯ ॥
మూషా(షా)వహనభేదాదౌ ఖండమేరౌ చ శిల్పకే ।
వైద్యకే రసభేదీయే తన్నోక్తం విస్తృతేర్భయాత్ ॥ ౬౦ ॥

టీ॥ క్రమస్థితైః (ఏకాద్యేకోత్తరాంకైః) — [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ములు తెలియును. సంగీతశాస్త్రమునందును నీనియమముపయోగమగును. ఇట్లు ఆయావ్యక్తి భేదములు తెలుసుకొనవలసిన గణితమునకు తగు సూత్రమొసగెను. ఇందు ఒకటికంటె గుణములతోడ చేయుటచేత భేదములు గ్రహింపబడుచున్నవి. స్థాన వ్యత్యయముచేత భేదములు గ్రహింపబడవు.

తత్రిఛందస్సూత్రే కింది యుదాహరణమ్.

ప్రస్తారే మిత్ర గాయత్ర్యాః స్యుః పాదవ్యక్తయః కతి;
ఏకాదిగురవ శ్చాశు కథ్యతాం తత్పృథక్ పృథక్॥ ౫౩॥

ఇహహి షడక్షరో గాయత్రీచరణస్తత షడంకానామేకాద్యేకోత్తరాంకానాం వ్యస్తానాం క్రమస్థానాంచ న్యాసః.

౬	౫	౪	౩	౨	౧
౧	౨	౩	౪	౫	౬

యథోక్తకరణేన లబ్ధా ఏకగురుపదవ్యక్తయః ౬ ద్విగురవః ౧౫ త్రిగురవః ౨౦ చతుర్గురవః ౧౫ పంచగురవః ౬ షడ్గురుః ౧ అగురుక సర్వలఘుః ౧ ఏవమేకాద్యైక్యం పాదవ్యక్తిమితిః ౬౪. ఏవం సమ వృత్తానాం పదసంఖ్యాయా పదసంఖ్యా వర్గః విషమవృత్తానాం ఏకద్విత్ర్యాదిగురు భేదానానీయ తేషామైక్యం సైకం కృత్వా తద్గాయత్రీవృత్త వ్యక్తి సంఖ్యా ౧౬౭౭౭౨౧౬. ఏవముక్తాద్యుత్కృతిపర్యంతం ఛందసాం వ్యక్తిమితిర్జ్ఞానం.

తా॥ మిత్రుడా! గాయత్రీఛందస్సును ప్రస్తరించుటయందు ఎన్నిపాద భేదములగును? ఏకగురువులెన్ని? ద్విగురువులెన్ని? త్రిగురువులెన్ని? ఇట్లు ఆయాభేదములెన్నెన్ని యగును? శీఘ్రముగ వేర్వేరుగ చెప్పుము.

వేదములకుం జెప్పనుపయోగించినయందు గాయత్రీఛందము ఛందస్సులలో వారగని. కావున 6 అక్షరములు. ఇది మొదలుకొని 1 వ వరకునైన సంఖ్యలను 1 వ మొదలు వరకు 6 వరకునైన సంఖ్యలచే భాగించవలెను. అట్లు భాగించ $\frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$ అట్లు భాగించినసంఖ్యలలో మొదటిసంఖ్య $\frac{6}{1}$ దీనికిపూర్వసంఖ్యలేకుండుటచే దీనికేగుణకారము లేదు, కావునదియే ఏకగురువ్యక్తిసంఖ్య 6 దీనిచే రెండవదైనసంఖ్య $\frac{5}{2}$ ను గుణింప. $\frac{6}{1} \times \frac{5}{2} = 15$ ద్విగురువ్యక్తిసంఖ్య.

ఇట్లు $\frac{15}{1} \times \frac{4}{3} = 5 \times 4 = 20$ త్రిగురువ్యక్తిసంఖ్య $\frac{20}{1} \times \frac{3}{4} = 15$ చతుర్గురువ్యక్తిసంఖ్య $\frac{15}{1} \times \frac{2}{5} = 6$ పంచగురువ్యక్తిసంఖ్య. $\frac{6}{1} \times \frac{1}{6} = 1$ షడ్గురువ్యక్తిసంఖ్య.

ఇట్లు గాయత్రీఛందఃప్రస్తారమందలి పాదభేదములు ఒక్కొక్కదానియందు 6 అక్షరములుండును. అందు ఎన్ని గురువులుండునో వాటిని తెలిసికొనవలెను. కావున ఏకద్విత్ర్యాదిగురువులగలభేదములచే చంద చతుష్పాద్గలగురువులగలభేదములగుచున్నవి. అట్లు సర్వగురుభేదమొకటి యొకట్లు సర్వలఘుభేదమొకటి యగును. కావున సర్వభేదసంఖ్య $= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 + 1 = 64$ అగుచున్నది.

ఈప్రకారము గాయత్రీచ్ఛందమునందు పాదమునకు 6 అక్షరములుండ్వన వాటికిపాదమునకు 24 అక్షరములు కావున 1 వ మొదలు 24 వరకు క్రమముగ నైన సంఖ్యలచే 24 నుండి 1 వరకు ఉత్క్రమముగ వ్రాసిన యంకములను భాగించగావచ్చు ఏకద్విత్ర్యాదిగురుభేదములను అన్నిటికి కలిపి అందుసర్వలఘు భేద మును 1 కలిపినచో నైన గాయత్రీవృత్తవ్యక్తిసంఖ్య 16777216 అగుచున్నది. ఇట్లు ఉక్తాదిగామొదలుకొని ఛందములయందు ఉత్కృతియను 26 వ ఛందమువరకు నైన వృత్తవ్యక్తుల తెలుసుకొనవలయును. ఈప్రకారము వృత్తాక్షరమితాంకము లచే వచ్చు ఏకద్విత్ర్యాదిభేదము లీక్రింద క్రమముగ చూపబడుచున్నవి.

24, 276, 2024, 10626, 42504, 134596, 346104, 735471, 1307504, 1961256, 2496144, 2704156, 2496144, 1961256, 1307504, 735471, 346104, 134596, 42504, 10626, 2024, 276, 24, 1 సర్వలఘుభేదము 1 అన్నిటిని కలుపగా 16777216 అగుచున్నది.

ఉక్తాదులగు 26 ఛందస్సులపేర్లుగల శ్లోకములు వృత్తరత్నాకరమందు

ఉక్తాత్యుక్తా తథామధ్యా ప్రతిష్ఠా సుప్రతిష్ఠితా।
గాయత్ర్యుష్ణిగనుష్టుప్చ బృహతీ పంక్తిరేవచ॥
త్రిష్టుప్చ జగతీచైవ తథాతిజగతీ మతా।
శక్వరీ సాతిపూర్వాస్యా దష్ట్యత్యష్టీ తతః స్మృతే॥
ధృతిశ్చాతిధృతిశ్చైవ కృతిః ప్రకృతి రాకృతిః।
వికృతి స్సంకృతిశ్చైవ తథాతికృతి రుత్కృతిః॥

[illegible]

[illegible]

[illegible] (145 [illegible])

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(1) [illegible]

[illegible]

[illegible]

(2) [illegible]

[illegible] (— 1) [illegible]

[illegible] (యా—1) అగుచున్నవి. ఇట్లు [illegible] 'యా' దీనిచే (యా—1) దీనిని గుణింపవలయును. [illegible] ఇట్లు [illegible] సంబంధములగు [illegible] గలుగుచున్నవి. [illegible] ఛేదసంఖ్య (యా—1)ను పూర్వఛేదసంఖ్యయగు (యా)చే గుణించి 2 చే భాగింపవలెను. అట్లు చేయగా [illegible] ఛేదసంఖ్య $= \frac{యా(యా-1)}{2}$ అగుచున్నది.

ఇట్లు [illegible] (యా—2) [illegible] 3 చే భాగింపవలయును. అట్లు చేయగా [illegible] ఛేదసంఖ్య $= \frac{యా(యా-1)}{2} \times \frac{(యా-2)}{3}$ అగుచున్నది.

ఇట్లు [illegible] ఛేదసంఖ్య $= \frac{యా(యా-1) \times (యా-2) \times (యా-3)}{2 \times 3 \times 4}$

అగును.

ఇట్లు [illegible] (యా) [illegible] ఛేదసంఖ్య $=$

$$= \frac{యా(యా-1) \times (యా-2) \times (యా-3) \ldots \{యా-(యా-1)\}}{2 \times 3 \times 4 \quad \ldots \quad \ldots \quad యా}$$

ఇందు యా—(యా—1)=1 అనియును యా $= \frac{యా}{1}$ అనియును [illegible] [illegible] సర్వఛేదసంఖ్య [illegible] సంఖ్య [illegible].

[illegible] గ్రహింపబడినవి. [illegible] గ్రహింపబడియున్నవి.

[illegible] సంబంధించిన [illegible] తెలియుచున్నవి.

ఉదాహరణం శ్లో॥

ఏకద్విత్ర్యాదిమూషా(భూ)వహనమితి ముఖాన్ బ్రూహి మే భూమిభర్తు [illegible] కర్ణ [illegible]
[illegible] ఛందశ్ఛేదాః॥ ౫౨॥

న్యాసః

౮	౭	౬	౫	౪	౩	౨	౧
౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮

లబ్ధా [illegible] సంఖ్యాః ౮, ౨౮, ౫౬, ౭౦, ౫౬, ౨౮, ౮, ౧ [illegible] (భూ) [illegible] భేదాః ౨౫౫.

అథ ద్వితీయోదాహరణే న్యాసః॥ $\frac{౬}{౧}, \frac{౫}{౨}, \frac{౪}{౩}, \frac{౩}{౪}, \frac{౨}{౫}, \frac{౧}{౬}$

లబ్ధా [illegible] సంఖ్యా [illegible] ౬, ౧౫, ౨౦, ౧౫, ౬, ౧ సర్వభేదాః ౬౩

ఇతి మిశ్రవ్యవహారః

ప్ర॥ గణకా! [illegible] 1, 2, 3 మొదలగు [illegible] ఛేదములసంఖ్యను చెప్పుము.

[illegible] 1 [illegible] 2 [illegible] 4 [illegible] 1, 2, 3 [illegible]

[illegible] 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1 [illegible] 256 [illegible]

[illegible] 18 [illegible]

ఇది మిశ్రవ్యవహారము. 13 వ ప్రకరణము.

14 వ ప్రకరణము.

శ్రేఢీవ్యవహారము.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

(5) [illegible] (134 [illegible]) [illegible]

(6) [illegible]

(1) [illegible]

[illegible] 4 [illegible] 4, 3, 4, 1 [illegible]

$4 యా + 6 (కా — యా) + 4 (యా — 2 కా + నీ) + (— యా + 3 కా — 3 నీ + పీ)$
= పీ

(4) [illegible]

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$ ఇది శ్రేఢి [illegible].

శ్రేఢీ రాసులు	1, 4, 9, 16, 25
ప్రథమాంతరములు	3, 5, 7, 9
ద్వితీయాంతరములు	2, 2, 2
తృతీయాంతరములు	0, 0
చతుర్థాంతరము	0

కాబట్టి శ్రేఢీపదములయొక్క అద్యరాసులు 1, 3, 2, 0, 0 ఇట్టివి శ్రేఢీ రాసులసంఖ్య 5 [illegible] ఏకద్వ్యాదిత్రైకసంఖ్యలచే [illegible]. [illegible] ఏకద్వ్యాదిత్రైకములు 5, 10, 10, 5, 1 ఇట్టివే శ్రేఢీ [illegible] $(5 \times 1) + (10 \times 3) + (10 \times 2)$
$+ (5 \times 0) + (1 \times 0) = 5 + 30 + 20 + 0 + 0 = 55$ అగుచున్నది.

అట్లే శ్రేఢీరాసులకు కలుపగా $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$ అగుచున్నది.

[illegible]: యా, కా, నీ, పీ శ్రేఢీరాసులు.

పై (2) ఉదాహరణమునందు చూపబడినప్రకారము శ్రేఢీపదంతరముల యొక్క అద్యరాసులు (1) యా (2) — యా + కా (3) + యా — 2 కా + నీ
(4) — యా + 3 కా — 3 నీ + పీ ఇవ్వబడు (1) యా (2) [illegible] — యా + కా
(3) [illegible] = + యా — 2 కా + నీ (4) [illegible] = — యా + 3 కా — 3 నీ + పీ

[illegible] 'కా' [illegible].

(1) యా

(2) కా = ప్ర + యా

(3) నీ = ద్వి + 2 ప్ర + యా

(4) పీ = తృ + 3 ద్వి + 3 ప్ర + యా

సర్వయోగము $= 4$ యా $+ 6$ ప్ర $+ 4$ ద్వి $+ 1$ తృ $=$ యా $+$ కా $+$ నీ $+$ పీ
అగుచున్నది.

[illegible] శ్రేఢీరాసులయొక్క [illegible] శ్రేఢీ [illegible] సంఖ్యలచే [illegible] శ్రేఢీ [illegible] స్పష్టముగ [illegible].

(2) [illegible] శ్రేఢీ [illegible]

[illegible]

అద్యాని చరంపదాని శ్రేఢీం [illegible] |

ఫలం [illegible] శ్రేఢ్యా అంత్యధనం [illegible] ॥

[illegible] శ్రేఢీ [illegible] 1 [illegible] శ్రేఢీరాసులలో [illegible] శ్రేఢీరాసు [illegible].

[illegible]

ఎట్లనగా యా, కా, నీ, పీ ఇవి శ్రేఢీరాసులుగ [illegible]. [illegible] $= $ తృ $+ 3$ ద్వి $+ 3$ ప్ర $+$ యా అగు చున్నది. [illegible] శ్రేఢీరాసులలో పీ, [illegible] ప్ర, ద్వి, తృ, [illegible] శ్రేఢీపదము 4 లో 1 [illegible] 3 [illegible] ఏకద్వ్యాదిత్రైకసంఖ్యలు [illegible]. ఇందు శ్రేఢీరాసులకు [illegible] 'యా' [illegible]. [illegible].

ఉదా:— పై (2) ఉదాహరణమునందు చూపబడ్డ శ్రేఢీ [illegible] ప్ర [illegible] 3, 5, 7, 9 [illegible] అద్యరాసులు.

3, 2, 0, 0 ఇట్టి శ్రేఢీపదము 5 లో 1 [illegible] 4 యొక్క ఏక ద్వ్యాదిత్రైకసంఖ్యల [illegible] $(3 \times 4) + (2 \times 6) + (0 \times 4) + (0 \times 1) = 24$ ఇందు శ్రేఢీముఖము 1 [illegible] $24 + 1 = 25$ ఇది శ్రేఢీలోని [illegible].

అథ శ్రేఢీవ్యవహారస్య [illegible] సంకలిత [illegible]

[illegible] సంకలిత [illegible] |

[illegible] సంకలితైక్యం ॥ 121 ॥

టీ॥ ఏక = ఒకటి, ఉత్తరవృద్ధ్యా ఏకోత్తరవృద్ధ్యా = ఒకటిచొప్పున హెచ్చిన పదముచే గుణింపబడిన పదముయొక్క సగము, సంకలితాఖ్యా = సంకలితమను పేరుగల, ఏకాద్యంకయుతిః = ఒకటి మొదలుగాగల అభీష్టసంఖ్యవరకునైన అంకముల యోగమగును!

సా = ఆసంకలితమనుపేరుగల ఏకాద్యంకయుతి, ద్వియుతేనపదేన = 2 చే కలుపబడినపదముచే గుణింపబడినదై, త్రిహృతా = 3 చే భాగింపబడినదై, సంకలితైక్యం స్యాత్ = సంకలితములయోగమగును!

ఏకాద్యంకముల సంకలితమును తెలుపుచున్నది.

135. సూ. (1) ఒకటి మొదలుకొని ఉద్దేశింపబడినసంఖ్యవఱకు గల అంకమల పదము. పదమునకు 1 చేర్చి కలుపుము. ఆసంఖ్యచే పదమును గుణింపుము. దానిని 2 చే భాగింపుము. అట్లు గుణించి భాగింపగా వచ్చు లబ్ధము ఒకటి మొదలు అభీష్టసంఖ్యవఱకునైన అంకముల యోగమగును. ఈయోగమునకు సంకలితమని పేరు.

సంకలితముల యోగమును తెలుపుచున్నది.

(2) ఆసంకలితమును 2తో కలుపబడిన పదముచే గుణించి 3 చే భాగింపు సంకలితములయోగమగును. అనగా ఒకటి మొదలు అభీష్టసంఖ్యవఱకునైన సంకలితముల యోగమగును.

ఉదాహరణం

ఏకాదీనాం నవాంతానాం పృథక్ సంకలితాని మే।
తేషాం సంకలితైక్యాని ప్రచక్ష్వ గణక ద్రుతమ్॥ ౧౧౭॥

న్యాసః ౧, ౨, ౩, ౪, ౫, ౬, ౭, ౮, ౯ లబ్ధాన్యేకాది సంకలితాని ౧, ౩, ౬, ౧౦, ౧౫, ౨౧, ౨౮, ౩౬, ౪౫ ఏషా మైక్యాని ౧, ౪, ౧౦, ౨౦, ౩౫, ౫౬, ౮౪, ౧౨౦, ౧౬౫.

తా॥ ఒకటి మొదలు 9 వరకునైనసంఖ్యలకు వేర్వేరసంకలితములను చెప్పుము. గణకుడా! ఆ ఒకటి మొదలు 9 వరకునైనసంఖ్యలయొక్క సంకలితముల యోగములను శీఘ్రముగ చెప్పుము.

ఉదా:— 1 మొదలు 9 వరకు సంకలితములు ఏ వానియోగములు ఏ ఇందు పదసంఖ్య 9 కావున నిదియే పదము. సూత్రప్రకారము

$$\frac{9 \times (9+1)}{2} = \frac{9 \times (9+1)}{2} = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$ ఇది సంకలితము.

అనగా $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ అగుచున్నది.

ఇట్లు పదసంఖ్య 2 అగునేని సంకలితము 3 అగును. పదము 3 అగునేని సంకలితము 6 అగును. పదము 4 అగునేని సంకలితము 10 అగును. ఇట్లు ఒకటి మొదలు 9వరకునైన సంఖ్యలు కలుపబడునేని నైన ఆయాసంకలితములు క్రిందివానిగా చూపబడినవి.

అంకములు 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

వీటిసంకలితములు 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 వీటియోగమునైనయంకములు

$$\frac{45 \times (9+2)}{3} = \frac{45 \times (9+2)}{3} = \frac{45 \times 11}{3} = 165$$ అగుచు, ఇది 9 వరకునైన అంకెల సంకలితముల యోగ మగుచున్నది.

ఇట్లు 5 వరకునైన అంకెలసంకలితముల యోగమెంతయనిన 5 వరకునైన అంకెల సంకలితము 15 దీనిని పదము 5 నందు 2 ను కలుపగావచ్చుసంఖ్య 7 చే గుణించి 3 చే భాగింపవలయును. $\frac{15 \times (5+2)}{3} = \frac{15 \times 7}{3} = 5 \times 7 = 35$ సంకలితయోగము.

ఇట్లు 9 వరకునైన సంకలితములయోగములు 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165.

ఈపద్ధతి- ఒకసమభుజ త్రిభుజాకారముగను ఉన్నప్రాకారముగల గోళములచేత రాశి కట్టబడిన గోళరాశిసంఖ్యను తెలియుటకుపయోగించును. అందు శిఖరమున 1 గోళము, దానిక్రింద 2వ వరుసలో 3 గోళములు, 3వ వరుసలో 6 గోళములు. ఇట్లు ఆయావరుసలలోని గోళములు, పైవరుసలోనిపక్కకు క్రిందివరుసలోని 3 గోళములు ఆధారముగ నుండును. కావున సంకలిత

[illegible] 1తో మొదలు [illegible]

(1) ఉపపత్తి — [illegible] (185 ప్ర) [illegible]

1, 1, 0, 0 ఇత్యాది. [illegible] 184 ప్ర. [illegible]

$$\frac{ప}{1},\ \frac{ప-1}{2},\ \frac{ప-2}{3}\ ఇత్యాది$$

[illegible] $\frac{ప}{1}$, $\frac{ప\times(ప-1)}{2}$ ఇత్యాది. [illegible] 1, 1 [illegible]

$$\left(\frac{ప}{1}\times 1\right)+\left(\frac{ప\times(ప-1)}{2}\times 1\right)=\frac{ప}{1}+\frac{ప\times(ప-1)}{2}$$

$$=\frac{2ప+ప^2-ప}{2}=\frac{ప^2+ప}{2}=\frac{ప(ప+1)}{2}$$

[illegible]

(2) సంకలితైక్యానయనోపపత్తి

సంకలితములు 1, 3, 6, 10, 15 ఇత్యాది. [illegible]

ప్రథమాంతరము	2,	3,	4,	5
ద్వితీయాంతరము	1,	1,	1	
తృతీయాంతరము	0,	0		

∴ [illegible] 1, 2, 1, 0 ఇత్యాది. [illegible] (184 ప్ర) [illegible]

$$\frac{ప}{1},\ \frac{ప\times(ప-1)}{2},\ \frac{ప\times(ప-1)}{2}\times\frac{ప-2}{3},\ ఇత్యాది,\ ప,\ \frac{ప^2-ప}{2},$$

$\frac{ప^3-3ప^2+2ప}{6}$ ఇత్యాది. [illegible]

$$\frac{ప}{1}+\frac{2ప^2-2ప}{2}+\frac{ప^3-3ప^2+2ప}{6}=ప+ప^2-ప+$$

$$\frac{ప^3-3ప^2+2ప}{6}=\frac{6ప+6ప^2-6ప+ప^3-3ప^2+2ప}{6}$$

$$=\frac{ప^3+3ప^2+2ప}{6}=\frac{(ప^3+2ప^2)+(ప^2+2ప)}{6}=\frac{ప^2(ప+2)+ప(ప+2)}{6}$$

$$=\frac{(ప^2+ప)\times(ప+2)}{6}=\frac{ప(ప+1)\times(ప+2)}{3\times 2}=\frac{ప(ప+1)}{2}\times\frac{ప+2}{3}$$

$=$ సంకలిత $\times\ \frac{ప+2}{3}$ [illegible]

(3) [illegible]

[illegible] 1, 2, 3, 4, ... ప

[illegible] ప, ప−1, ప−2, ప−3 ... 1

[illegible] ప+1, ప+1 [illegible] ప (ప+1) [illegible] $\frac{ప(ప+1)}{2}$ [illegible]

(4) సంకలితయోగమునకు ఉపపత్తి:—

ప్రాథమిక సంకలితానయనముచే సం $= \frac{న(న+1)}{2} = \frac{న^2+న}{2}$

$\frac{న^2}{2} + \frac{న}{2}$ అగుచున్నది.

ఇందు పదసంఖ్యను క్రమముగా భావించిన సంఖ్యలను ఒకటిమొదలు బెట్టి సంకలితముల యోగమగుచున్నది. కావున పదసంఖ్య 1 అయినచో

(1) సం $= \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} = 1$, న $= 2$ అయినచో (2) సం $= \frac{2^2}{2} + \frac{2}{2} = 3$

న$=3$ అయినచో (3) సం $= \frac{3^2}{2} + \frac{3}{2} = 6$ యగును న$=4$ అయినచో

(4) సం $= \frac{4^2}{2} + \frac{4}{2} = 10$ ... $1 + 3 + 6 + 10 \ldots\ldots =$ సంయోగము కావున

$= \left(\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^2}{2} \cdots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} \cdots\cdots\right)$

$= \frac{\text{వర్గయోగ}}{2} + \frac{\text{సం}}{2}$ కానీ వెనుక చెప్పబడిన "ద్విఘ్నపదం కుయుతం త్రివిభక్తం"

అను సూత్రమువలన వర్గయోగ $= \left(\frac{2న+1}{3}\right) \times$ సం $\therefore \frac{\text{వర్గయోగ} + \text{సం}}{2}$

$= \frac{\left(\frac{2న+1}{3} \times \text{సం}\right) + \text{సం}}{2} = \left(\frac{2న+1}{3} \times \frac{\text{సం}}{2}\right) + \frac{\text{సం}}{2} = \frac{\text{సం}}{2}\left(1 + \frac{2న+1}{3}\right)$

$= \frac{\text{సం}}{2} \times \left(\frac{2న+4}{3}\right) = \text{సం} \times \frac{న+2}{3}$ అగుచున్నది.

ఈ సూత్రమునందు సంకలితయోగపద్ధతి స్పష్టమగుచున్నది.

కృతిఘనచితియోగే కరణసూత్రం వృత్తం

ద్విఘ్నపదం కుయుతం త్రివిభక్తం సంకలితేన హతం కృతియోగః।
సంకలితస్య కృతేస్సమమేకాద్యంకఘనైక్యముదీరితమార్యైః॥

టీ॥ ద్విఘ్నపదం = రెండుచే గుణింపబడిన పదము కుయుతం = ఒకటిచే కలుపబడినదై త్రివిభక్తం = 3 చే భాగింపబడినదై సంకలితేన హతం = సంకలితముచే గుణింపబడినదై కృతియోగః = వర్గయోగమగును.

ఏకాద్యంకఘనైక్యం = ఒకటి మొదలుగల అంకెల ఘనయోగము సంకలితస్య కృతేః = సంకలితము యొక్క వర్గమునకు సమం = సమమై ఆర్యైః ఉదీరితం = పూర్వులచే చెప్పబడినది.

137. ప్ర॥ (1) రెండవ పదముకంటె నొకటెక్కువ వర్గయోగమునకు పద్ధతి. పదమును రెండు చేసి ఒకటి కలిపి 3 చే భాగించగా వచ్చునది సంకలితముచే గుణింప వర్గయోగమగును.

[2] ఒకటి మొదలు పదమువరకున్న సంఖ్యల ఘనములు కలుపవలసినచో పదసంఖ్యసంబంధమగు సంకలితమునకు వర్గమును గణింపుము. అదియే ఆ సంఖ్యల ఘనయోగమగును.

ఉదాహరణమ్.

తేషాం మే వద వర్గైక్యం ఘనైక్యం చ వద ద్రుతమ్।
కృతిసంకలనామార్గే కుశలా యది తే మతిః॥ ౫౬॥

న్యాసః. ౧, ౨, ౩, ౪, ౫, ౬, ౭, ౮, ౯, అను సంఖ్యల వర్గైక్యం ౧, ౪, ౯, ౧౬, ౨౫, ౩౬, ౪౯, ౬౪, ౮౧, ఘనైక్యం ౧, ౮, ౨౭, ౬౪, ౧౨౫, ౨౧౬, ౩౪౩, ౫౧౨, ౭౨౯

తా॥ నీవు కృతిసంకలనపద్ధతి యందు నేర్పుగలదానవైనచో ఆ సంఖ్యల వర్గయోగమును ఘనయోగమును శీఘ్రముగ చెప్పుము.

[1] ఉదా: 9 వరకున్న వర్గముల యోగము తెలియవలెను. పదము 9ను రెండుచే గుణింప 18. ఒకటి కలుప 19, మూడుచే భాగింప $\frac{19}{3}$ దీనిని సంకలితము 45 చే గుణింప $\frac{19}{3} \times \frac{45}{1} = 19 \times 15 = 285$ ఇది వర్గయోగము.

సరిచూడు. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 = 285$ అగుచున్నది.

ఈపద్ధతి, వర్గక్షేత్రములందు [illegible] గోళములను పరచి క్రమముగ పేర్చబడిన గోళరాశిని తెలిసికొనుటకుపయోగించును. అందు శిఖరమున 1టి, దానిక్రింద పైవరుసలో 4 గోళములు, ఇట్లు [illegible] గోళములు, క్రింది వరుసలోని [illegible] గోళము [illegible] క్రమ [illegible] గోళసంఖ్య [illegible] వర్గసంఖ్యలగుటచే 1 టి మొదలు వరుససంఖ్యకవరకుగల సంఖ్యల వర్గయోగము గోళరాశియగును.

[2] ఉదా: 9 వరకుగల అంకెల ఘనములయొక్క యోగము.

9 వరకుగల అంకెల సంకలితము 45 దీనివర్గము 2025. ఇది ఏకాదినవాంత సంఖ్యాఘనముల యోగము అగుచున్నది.

[1] ఉపపత్తి. వర్గయోగపద్ధతినిరూపణ (135 పద్య. చే),

వర్గరాసులు	1, 4, 9, 16, 25......$ప^2$
ప్రథమాంతర	3, 5, 7, 9......
ద్వితీయాంతర	2, 2, 2
తృతీయాంతర	0, 0

ప్రథమాద్యరాసులు 1, 3, 2, 0 వీటిని ఏకద్వ్యాదిభేదములచే గుణించి కలుపగా $\frac{ప}{1} + \frac{3ప^2 - 3ప}{2} + \frac{2ప^3 - 6ప^2 + 4ప}{6}$ వర్గయోగ

$$= \frac{6ప + 9ప^2 - 9ప + 2ప^3 - 6ప^2 + 4ప}{6} = \frac{2ప^3 + 3ప^2 + ప}{6}$$ దీనిని రూపాంతరము చేయగా

$$= \frac{2ప^3 + 2ప^2 + ప^2 + ప}{6} = \frac{2ప(ప^2+ప)}{6}\ \frac{(ప^2+ప)}{}$$

$$= \frac{(ప^2+ప)\ (2ప+1)}{6} = \frac{(ప^2+ప)\ (2ప+1)}{2 \times 3}$$

$$= \frac{ప^2+ప}{2} \times \frac{2ప+1}{3} = \frac{ప(ప+1)}{2} \times \frac{2ప+1}{3} = సం \times \frac{2ప+1}{3}$$ ఇట్లు వర్గయోగపద్ధతి యొక్క ఉపపత్తి యుక్తమగుచున్నది.

ప్రకారాంతరముచే (సంకలితైక్యపద్ధతి యొక్క ఉపపత్తిచే)

$$\because\ సంయో = \frac{వర్గయోగ}{2} + \frac{సం}{2}\ (136\ ప\ 4\ ఉపపత్తియా)$$

$$\therefore \frac{వర్గయో}{2} = సంయో - \frac{సం}{2}$$ సమచ్ఛేదములు చేసి ఛేదము విడువగా

$$\therefore\ వర్గయో = 2\ సంయో - సం.$$

$$\therefore\ వర్గయోగ = 2\left(\frac{ప^2+ప}{2} \times \frac{ప+2}{3}\right) - \frac{ప^2+ప}{2}$$

$$= \frac{2ప^3 + 6ప^2 + 4ప}{2 \times 3} - \frac{3ప^2 + 3ప}{2 \times 3} = \frac{2ప^3 + 3ప^2 + 1ప}{2 \times 3}$$

$$= \frac{2ప^3 + 2ప^2 + ప^2 + ప}{2 \times 3} = \frac{2ప^2(ప+1) + ప(ప+1)}{2 \times 3}$$

$$= \frac{(ప+1)\ (2ప^2+ప)}{2 \times 3} = \frac{(ప+1)}{2} \times \frac{ప}{1} \times \frac{(2ప+1)}{3}$$

$= \frac{(ప+1)ప}{2} \times \frac{2ప+1}{3}$ ఈపదరూపమునందు సంకలితముచే, ద్విగుణితపదమునందు 1టిని కలిపి 3 చే భాగించగా వచ్చినదానిని గుణించవలయుననిస్పష్టమగుచున్నది. ఇట్లే పద్ధతులు పరాంతప్రకారములచే యుక్తములగుచున్నవి. విస్తరభీతిచే ఈ పద్ధతి భేదప్రదర్శనము చాలించితిని

[2] ఉపపత్తి: ఘనయోగపద్ధతినిరూపణ (135 పద్య చే)

ఒకటి మొదలుగల అంకెల ఘనము యొక్క ఘనశ్రేఢిపదవ శ్రేఢీపదాంతరల ఆద్యరాసులు, 1, 7, 12, 6, 0 వరుసగునవి ప్రాగ్వద్గుణకారము ఏకద్వ్యాదిభేదములు.

[1] ప [2] $\frac{ప^2 - ప}{2}$ [3] $\frac{ప^3 - 3ప^2 + 2ప}{6}$

[4] $\frac{ప^4 - 6ప^3 + 11ప^2 - 6ప}{24}$ ఆద్యరాసులలో 5వ సంఖ్య శూన్యమగుటచే ఈనాలుగుభేదములమాత్రమే ప్రయోజనమగును. క్రమముగా ఈ భేదములచే పదాంతరల ఆద్యరాసులనుగుణించి కలుప ఘనయోగమగును.

$$\therefore \text{ప} + \frac{7\text{ప}^2 - \text{ప}?}{2} + \frac{12\text{ప}^3 - 33\text{ప}^2 + 24\text{ప}}{6} + \frac{6\text{ప}^4 - 36\text{ప}^3 + 66\text{ప}^2 - 36\text{ప}}{24}$$

$$= \text{ఘన యో} = \frac{7\text{ప}^2 - 5\text{ప}}{2} + \frac{2\text{ప}^3 - 6\text{ప}^2 + 4\text{ప}}{1} + \frac{\text{ప}^4 - 6\text{ప}^3 + 11\text{ప}^2 - 6\text{ప}}{4}$$

$$= \text{ఘన యో} = \frac{14\text{ప}^2 - 10\text{ప} + 8\text{ప}^3 - 24\text{ప}^2 + 16\text{ప} + \text{ప}^4 - 6\text{ప}^3 + 11\text{ప}^2 - 6\text{ప}}{4}$$

$$= \frac{\text{ప}^4 + 2\text{ప}^3 + \text{ప}^2}{4} = \text{ఘన యో}, \ \frac{\text{ప}^4 + 2\text{ప}^3 + \text{ప}^2}{4} = \left(\frac{\text{ప}^2 + \text{ప}}{2}\right)^2$$

[illegible] $\frac{\text{ప}^2 + \text{ప}}{2}$ [illegible] $= \left(\frac{\text{ప}^2 + \text{ప}}{2}\right)^2$

$$= \frac{\text{ప}^4 + 2\text{ప}^3 + \text{ప}^2}{4} = \text{ఘన యోగము}$$ [illegible]

183. [illegible]

[1] [illegible]

[illegible]

[2] [illegible]

[illegible]

[1] [illegible]

[2] [illegible]

[illegible]

[3] [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 1 [illegible] 5 [illegible]

(183 [illegible]) [illegible] 1, 3, 6, 10, 15 [illegible]

$$= \left(\frac{\text{సం} - 1}{3} + \text{సం}\right) \times \text{వర్గ యో} = \left(\frac{15 - 1}{3} + \frac{15}{1}\right) \times \frac{55}{1}$$

$$= \frac{14 + 75}{5} \times \frac{55}{1} = 89 \times 11 = 979.$$ [illegible] $1 + 16 + 81 + 256 + 625$

$= 354 + 625 = 979$ [illegible]

[illegible] $= \left(\frac{\text{సం} - 1}{3} + \text{సం}\right) \times \text{ఘన యో}$

$$= \frac{(15 - 1) + 45}{3} \times \frac{225}{1} = \frac{14 + 45}{3} \times \frac{225}{1} = 59 \times 75 = 4425$$ [illegible]

[illegible] $1 + 32 + 243 + 1024 + 3125 = 4425$

[illegible] $= \frac{(\text{ప} + 3)\ \text{సంకలిత యో}}{4} -$ [illegible]

$$= \frac{(5 + 3) \times 35}{4} = \frac{8 \times 35}{4} = 2 \times 35 = 70$$

[illegible] $= 1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

* [illegible]

* [illegible]

139. వ్రి. [1] ఒకటి మొదలు క్రమముగానైన విషమాంకములను కలుపగా వచ్చిన యోగఫలము ఎన్ని కలవో ఆసంఖ్యాగచ్ఛమనియూ పదమనియూ చెప్పబడును. ఆగచ్ఛసంఖ్యయొక్క వర్గము ఒకటి మొదలు విషమాంకముల యోగముగా నున్నది.

[2] రెండు మొదలు సమాంకముల గణితఫలసిద్ధికి పదమునందు ఒకటిని కలుపగా నగు సంఖ్యను పదముచే గుణింపవలయును.

ఉదాహరణమ్

వదే సమంకమితే స్వ... [illegible] పదము తే సఖే।

సమానాం విషమాణాం చ పృథక్ సంకలితే ... [illegible]

తా॥ ఒకటి మొదలు 5 విషమాంకముల యొక్కయు రెండు మొదలు 5 సమాంకముల యొక్కయు యోగములను వేర్వేరు శీఘ్రముగ చెప్పుము.

ఉదా: $1+3+5+7+9$ వీటి యోగమెంత? $2+4+6+8+10$ వీటి యోగమెంత?

విషమాంకయోగము. 5 సంఖ్యలు కూడవలయును కావున 5 యొక్క వర్గము 25 ఇది యోగమగును.

సమాంకయోగము $(5+1)\times 5 = 6\times 5 = 30$ ఇది సమాంకయోగమగును.

ఉపపత్తి:—పక్ష్యమాణసూత్రముచే స్పష్టముగాగలదు. (140 వ్రి. చూ.)

యథోక్తకరణసూత్రం వృత్తం

వ్యేకపదఘ్నచయో ముఖయుక్ స్యాదంత్యధనం ముఖయోగదలం తత్।

మధ్యధనం పదసంగుణితం తత్సర్వధనం గణితం చ తదుక్తమ్॥

టీ॥ వ్యేకపదఘ్నచయః=ఒకటిచే తీసివేయబడిన పదముచే గుణింపబడిన వృద్ధి, ముఖయుక్=ఆదిధనముతో కూడినదైనా, అంత్యధనం స్యాత్ = అంత్యధనము (కడపటిధనము) అగును. తత్=ఆ అంత్యధనము, ముఖయుక్=ఆదిధనముతో కూడింపబడినదై, దలితం=అర్ధింపబడినదై, మధ్యధనం=మధ్యధనమగును, తత్=ఆమధ్యధనము, పదసంగుణితం=పదసంఖ్యచే గుణింపబడినదై, సర్వధనం=సర్వధనము, గణితం చ=గణితమనియు, ఉక్తం = చెప్పబడినది.

140. వ్రి. [1] చెప్పబోవు వ్యవహారమునందు మొదటి ధనముకంటె రెండవ ధనము, రెండవ ధనముకంటె మూడవ ధనము ఇట్లు ఒకదానికంటె మరియొకటి క్రమముగ వృద్ధిగల ధనము మొదలగువాటిని సంబంధించిన ప్రశ్నలందు మొదటిధనము లేక మొదటి అంకము ఆది, ముఖము, ఇత్యాదిపదములచేతను ఆవృద్ధిధనము చయము, వృద్ధి, ఉత్తరము ఇత్యాదిపదములచేతను, కడపటిధనము అంత్యధనము అనియు, మధ్యధనము మధ్యధనమనియు, ఆ ధన సంఖ్యాపదము, గచ్ఛ ఇత్యాదిపదములచేతను, మొదటినుండి కడవరకు గల మొత్తము సర్వధనమనియు, గణితమనియు చెప్పబడును.

[2] పదమునుండి 1 ని తీసివేసి దానిచే చయమును గుణించి ఆదిధనమును కలిపినచో నది అంత్యధనమగును.

[3] అంత్యధనమునందు ఆదిధనమును కలిపి అర్ధించిన మధ్యధనమగును.

[4] మధ్యధనమును పదముచే గుణింప సర్వధనమగును.

ఉదాహరణం

ఆద్యే దినే ద్రమ్మచతుష్టయం యో దత్వా ద్విజేభ్యోఽనుదినం ప్రవృత్తః।

దాతుం సఖే పంచచయేన పక్షే ద్రమ్మాః కతి ప్రాగ్వద తేన దత్తాః॥ 2 ॥

న్యాసః. ఆదిః 4 చయః 5 గచ్ఛః 15 అత్రాదిధనమే మధ్యధనం తేన అంత్యధనం చేత సర్వధనం ... [illegible]

తా॥ మిత్రుడా! ఒకదాత మొదటిదినమున 4 ద్రమ్మములను బ్రాహ్మణులకొరకు నిచ్చి అటుపిమ్మట ప్రతిదినమందును 5 చొప్పున అధికముగ నిచ్చుటకు ఆరంభించెను. అతడు 15 దినములకు ఎన్ని ద్రమ్మము లిచ్చెను? శీఘ్రముగ చెప్పుము.

ఉదా: ఆదిధనము 4 వృద్ధి 5 పదము 15

సూత్రప్రకారము పదము 15 లో 1 ని తీసివేయ 14 దీనిచే చయమును గుణింప 70, ముఖమనగ ఆదిధనమును 4 ను కలుప 74, ఇది అంత్యధనము, ఇందు ఆదిధనము 4 ను కలుప 78 దీని నర్ధించ 39 మధ్యధనము, దీని పదముచే గుణింప $39\times 15=585$ సర్వధనము.

అథవా $\frac{(ప-1)చ+ఆ+ఆ}{2}\times ప=\frac{14\times 5+4+4}{2}\times 15=39\times 15=585$ సర్వ

[1] ఉపపత్తి: [illegible] అని చెప్పెను. [illegible]

[illegible] $\{(ప-1)చ + ఆ\}$ అగుచున్నది. ఇట్లు [illegible] 15 దినములలో [illegible] 8 వ దినము నాటి [illegible] (7 చయ + ఆ) అగుచున్నది.

$$\therefore (7 \times చ) + ఆ = \left(\frac{15-1}{2} \times చ\right) + ఆ = \frac{(ప-1)చ}{2} + ఆ$$

$$= \frac{ఆ + ఆ + చ(ప-1)}{2} = మధ్యధన.$$

సర్వధనము అనగా [illegible] (ప − 1) [illegible] సర్వధనము [illegible].

$$\therefore (ప-1) \text{ యొక్క సంకలితము } = \frac{ప(ప-1)}{2} \text{ (135 పు. చూ.)}$$

$$\therefore ప \times ఆ + \frac{(ప-1)చ \times ప}{2} = \frac{(ప \times 2ఆ)}{2} + \frac{(ప-1)చ \times ప}{2}$$

$$= \frac{ఆ2 + (ప-1)చ}{2} \times ప = \frac{ఆ + ఆ + చ(ప-1)}{2} \times ప = మధ్యధన \times ప = సర్వధన$$

[2] ప్రకారాంతరోపపత్తి: [illegible] [185 పు. 2 చూ.]

ఇచట శ్రేఢీ [illegible]	4, 9, 14, 19, 24......
ప్రథమ [illegible]	5, 5, 5, 5......
ద్వితీయ [illegible]	0, 0, 0

ఇందు [illegible] (ప − 1)5 ఇందు [illegible] (ప − 1) [illegible] = అంత్యధనము. [illegible]

(185 పు. 1) [illegible] 4, 5 [illegible]

$$[illegible]\ \frac{ప}{1} \times \frac{4}{1} + \frac{(ప-1)ప \times 5}{2}$$

$$= ప \times ఆ + \left(\frac{(ప-1)చ}{2} \times ప\right) = \frac{ప \times ఆ2}{2} + \frac{ప \times (ప-1)చ}{2}$$

$$= ప \times \frac{2ఆ + (ప-1)చ}{2} = \text{సర్వధనము.}$$ ఇట్లు [illegible] అగుచున్నది.

[3] [illegible] 133 పు. [illegible] ఎట్లనగా:—
133 [illegible] 5 [illegible] ఆ 1 [illegible] 2 [illegible] 5 [illegible] సర్వధనము $\left\{\frac{(ప-1)చ}{2} + ఆ\right\} \times ప$ [illegible] చయ = 2, ఆది = 1

కావున $\left\{\frac{(ప-1)2}{2} + ఆ\right\} \times ప = \{(ప-1)+1\} \times ప = ప \times ప = ప^2$

అగుచున్నది.

[4] ఇట్లు [illegible] 2 [illegible] సర్వధన $= \left\{\frac{(ప-1)2}{2} + ఆ\right\} \times ప = \{(ప-1)+ఆ\} \times ప = (ప+1)ప$

అగుచున్నది.

[5] ఇట్లు [illegible] ఆది = 1

చయ = 1 కావున సర్వధన $= \left\{\frac{(ప-1)1}{2} + 1\right\} \times ప = \frac{ప+1}{2} \times ప$ అగుచున్నది.

ఇట్లు [illegible]

ఉదాహరణాంతరమ్.

[illegible]

[illegible]

వ్యాఖ్యా: ఆదిః 7 చయః 5 గచ్ఛః 8 ఆద్యన్తయోర్మధ్యధనం $\frac{49}{2}$ అంత్యధనం 42 సర్వధనం 196. అత్ర సమాధినే గచ్ఛే మధ్యదినాభావా స్వర్ధాన్య త్యాగిపదదిదధనయో ర్యోగార్ధం మధ్యధనం భవతీయుక్తా పేతి పరితీతి యుక్త్యాద్యా.

తా॥ ఆది 7 చయము 5 గచ్ఛము (పదము) 8 యిదియుండగా అట్టి మధ్యధన మెంత? అంత్యధనమెంత? సర్వధనమెంత? చెప్పుము.

పదము 8 లో 1 తీసివేయగా 7, దీనిని చయముచే గుణింప 35, దీనికి ఆదినిగలుప 42, అంత్యధనము. ఇందులో ఆదిధనము 7ను కలిపి అర్ధించిన $\frac{49}{2}$ మధ్యధనము. దీనిని పదముచే గుణింప $\frac{49}{2} \times \frac{8}{1} = 49 \times 4 = 196$ సర్వధనము.

ఇచట మధ్యధనము (సగటువిలువ) అనగా మధ్యగతమైనది. పదము బేసియైనచో మధ్యపదము యొక్క విలువయే మధ్యధనము. సరిపదమైనచో మధ్యనున్న రెండుపదములయొక్క యోగార్ధము మధ్యధనమగును.

ముఖజ్ఞానాయ కరణసూత్రం వృత్తార్ధం

గచ్ఛహృతే గణితే వదనం స్యాద్వ్యేకపదఘ్నచయార్ధవిహీనే।

టీ॥ గణితే = సర్వధనము, గచ్ఛహృతే = పదముచే భాగింపబడి, వ్యేకపదఘ్న చయార్ధవిహీనే = ఒకటిచే తీసివేయబడిన పదముచే గుణింపబడిన చయముయొక్క సగముచే తీసివేయబడినచో, వదనం = ఆదిధనము, స్యాత్ = అగును.

ఉపపత్తి: $సర్వధనము = ప \times \frac{2ఆ + (ప-1)చ}{2}$ (140 శ్లో.)

$\therefore \frac{సర్వధన}{ప} = ఆ + \frac{(ప-1)చ}{2}$ ఇరుపక్షముల సమశోధనము చేయగా

$\frac{సర్వధన}{ప} - \frac{(ప-1)చ}{2} =$ ఆదిధనము అగుచున్నది.

141. శ్లో. సర్వధనమును, గచ్ఛమును, చయమును తెలిసి ఆది తెలియనిచో సర్వధనమును గచ్ఛచే భాగించి దానివలన, ఒకటిచే తీసివేయబడిన పదమును చయమును చేగుణించి రెండుచే భాగింప వచ్చినదానిని తీసివేసినచో శేషము ఆదిధన మగుచున్నది.

ఉదాహరణమ్.

పంచాధికం శతం శ్రేఢీఫలం సప్త పదం కిల।
చయం త్రయం వయం విద్మో వదనం వద నందన॥ ౫౧

న్యాసః. చయః 3 గచ్ఛః 7 ఫలం 105 లబ్ధమాదిః 6.

తా॥ సర్వధనము 105 పదము 7 చయము 3 తెలిసి యీ ఆదిధనము తెలియదు. పుత్రా! ఆదిధనమును చెప్పుము.

సర్వధనము 105 ను పదము 7 చే భాగింప 15 లబ్ధము

పదము 7 లో 1 తీసివేసి చయము 3 చే గుణించి 2 చే భాగింప 9 లబ్ధము. దీనిని పూర్వలబ్ధము 15 నుండి తీసివేయగా శేషము 6 ఆదిధనము. కావున ఆది 6 చయము 3 పదము 7 అంత్యధనము 24 మధ్యధనము 15 సర్వధనము 105.

చయజ్ఞానాయ కరణసూత్రమ్

గచ్ఛహృతం ధనమాదివిహీనం వ్యేకపదార్ధహృతం చ చయః స్యాత్ ॥ ౫౦

టీ॥ ధనం = సర్వధనము, గచ్ఛహృతం = పదముచే భాగింపబడినది, ఆదివిహీనం = ఆదిధనముచే తీసివేయబడి వ్యేకపదార్ధహృతం చ = ఒకటిచే తీసివేయబడిన పదముయొక్క సగముచే భాగింపబడినది చయః స్యాత్ = చయమగును.

142 శ్లో. ఆది, పదము, సర్వధనము, తెలిసి చయము తెలియనిచో సర్వధనమును పదముచే భాగించి లబ్ధమువలన ఆదిధనమును తీసివేయుము. ఆ శేషమును పదమువలన 1ని తీసి అర్ధించినదానిచే భాగించినచో లబ్ధము చయమగును.

ఉపపత్తి: పూర్వ (141 శ్లో) సూత్రముచే

$ఆది = \frac{సధ}{ప} - \frac{(ప-1)చ}{2}$

$$\therefore \frac{సధ}{ప} = ఆది + \frac{(ప-1)చ}{2}$$

$$\therefore \frac{సధ}{ప} - ఆది = \frac{(ప-1)చ}{2} = \frac{సధ}{ప} - ఆది = చ \times \frac{ప-1}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{సధ}{ప} - ఆది\right) \div \frac{ప-1}{2} = $$ చయము అగుచున్నది.

ఉదాహరణం.

ప్రథమమగమదహ్నా యోజనే యో జనేశః
తదను నను కయాఽసౌ బ్రూహి యాతోఽత్ర వృద్ధ్యా।
అరికరిహరణార్థం యోజనానామశీతిం
రిపునగరమవాప్తః సప్తరాత్రేణ ధీమన్॥ ౬౦॥

న్యాసః. ఆదిః ౨ గచ్ఛః ౭ చయః ? ధనం ౮౦

లబ్ధం చయమానం $\frac{౨౨}{౭}$, అంత్యధనం $\frac{౧౪౬}{౭}$, మధ్యధనం ౮౦

తా॥ బుద్ధిమంతుడా! ఒక రాజు మొదటిదినమున 2 యోజనముల దూరము ప్రయాణముచేసెను. పిమ్మట క్రమముగ వృద్ధిచేయుచు నడచెను. ఇట్లు క్రమముగ వృద్ధిపొందుచునడచుచు శత్రువుల యేనుగులను తీసికొనిపోవుటకై 80 యోజనముల దూరమునగల శత్రుపట్టణమును 7 దినములలో చేరెను. ఆ క్రమముగ వృద్ధి యెంత?

ఇందు ఆది 2 గచ్ఛ 7 సర్వధనము 80 చయ మెంత? అని ప్రశ్నము.

పైసూత్రప్రకారము సర్వధనము 80 ను గచ్ఛ 7 చే భాగించగా వచ్చిన దానిలో ఆది 2 ను తీసివేయ $\frac{80}{7} - 2 = \frac{80-14}{7} = \frac{66}{7}$ వచ్చిన దానిని ఒకటి తక్కువ గచ్ఛ సగముచే భాగించినను వచ్చే భాగము $\frac{66}{7} \div \frac{3}{1} = \frac{66}{7} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{22}{7}$ చయమగును.

గచ్ఛజ్ఞానాయ కరణసూత్రం వృత్తమ్

శ్రేఢీఫలాదుత్తరలోచనఘ్నాచ్చయార్ధవక్త్రాంతరవర్గయుక్తాత్।
మూలం ముఖోనం చయఖండయుక్తం చయోద్ధృతం గచ్ఛముదాహరన్తి॥

టీ॥ ఉత్తరలోచనఘ్నాత్ = చయముచేత రెండింట (అనగా ద్విగుణిత చయముచే) గుణింపబడినదియు, చయార్ధవక్త్రాంతరవర్గయుక్తాత్ — చయార్ధము యొక్కయు ఆదియొక్కయు అంతరము యొక్క వర్గముతో కూడినదియునగు, శ్రేఢీఫలాత్ = సర్వధనమునుండి మూలం = మూలము, ముఖోనం = ఆదిచేత తీసివేయబడినది చయఖండయుక్తం = చయార్ధముతో కూడినదై, చయోద్ధృతం = చయముచే భాగింపబడినదాని (తత్ = అట్టిదానిని) గచ్ఛం = పదముగ (పూర్వాచార్యులు) ఉదాహరన్తి = చెప్పుచున్నారు.

143. ఆది, చయ, సర్వధనములు తెలిసిన గచ్ఛము తెలిసికొనుట —

సర్వధనమును చయముచేత గుణించి దానిని రెట్టింపవలెను. అందు చయార్ధమునకు ఆదికిని గల భేదముయొక్క వర్గమును కలుపవలెను. అట్లు కలుపగా వచ్చినసంఖ్యయొక్క వర్గమూలమునుండి ఆదిని తీసివేసి చయార్ధమును కలుపవలెను. దానిని చయముచే భాగింపవలెను. భాగింపగా వచ్చు లబ్ధము పదము అగును.

ఉదాహరణమ్.

ద్రమ్మత్రయం యః ప్రథమేఽహ్ని దత్వా దాతుం ప్రవృత్తో ద్విచయేన తేన।
శతత్రయం షష్ట్యధికం ద్విజేభ్యో దత్తం కియద్భిర్దివసైర్వదాశు॥ ౬౧॥

తా॥ ఒకదాత మొదటిదినమున బ్రాహ్మణులకు మూడుద్రమ్ములనిచ్చి రెండవదినమున 4 ద్రమ్ములను మూడవదినమున 6 ద్రమ్ములను ఇట్లు ప్రతిదినమునకు రెండేసి 8 ద్రమ్ములు అధికముగనిచ్చుచు ఇచ్చుటనారంభించెను. కొన్ని దినములకు దానికి మొత్తము 360 ద్రమ్ములు వ్యయమైనవి. అతడు ఎన్నిదినములిచ్చెను? అని ప్రశ్నము.

న్యాసః. ఆది ౩ చయః ౨ ధనం ౩౬౦ లబ్ధం గచ్ఛః ౧౮

ఉదా: ఆది చది సర్వధనము 360. ఇచట సర్వధనము 360 ను చయము 2 చే గుణించ 720, దీనిని 2 చే గుణించ 1440 [illegible] ఆది 3 [illegible] అంతరము 3—1=2 దీని వర్గము 4 ను కలుప 1444 దీని మూలము 38 లో [illegible] 35, [illegible] 36, [illegible] 18 [illegible].

$$= \frac{\sqrt{360 \times 2 \times 2 + (3-1)^2} - 3 + 1}{2} = 18$$

[illegible]

[illegible]

144. [illegible] (50 [illegible])

(1) [illegible]

(2) [illegible] 1 [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

(5) [illegible]

(6) [illegible]

(7) [illegible] భాగింపవలెను.

(8) [illegible] గుణోత్తరశ్రేఢియందు సర్వధనము.

ఉదాహరణమ్.

పూర్వం వరాటకయుగం యేన ద్విగుణోత్తరం ప్రతిజ్ఞాతం ।
ప్రత్యహమర్థిజనాయ స మాసే నిష్కాన్ దదౌ కతి [illegible] ॥

న్యాసః. ఆదిః ౨ ఉత్తరః ౨ గచ్ఛః ౩౦ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] (గచ్ఛ) [illegible] 2 గచ్ఛ [illegible]. [illegible] ?

ఇచట ఆదిగుణకము [illegible] గచ్ఛ(పదము) 30

(30 [illegible]) గచ్ఛ [illegible].

30 స, $32768^2 = 1073741824$

15 స, $16384 \times 2 = 32768$

14 వ, $128^2 = 16384$

7 స, $64 \times 2 = 128$

6 వ, $8^2 = 64$

3 స, $4 \times 2 = 8$

2 వ, $2^2 = 4$

1 స, $1 \times 2 = 2$

[illegible] 0 వ, 1

[illegible] 1073741824 [illegible]

[illegible]

గుణకము 2 [illegible] 1 [illegible] 1073741823 [illegible]

[illegible] 2147483648 [illegible]

[illegible]

1048576 [illegible]

[illegible]

[illegible] 6 వరాటకములు.

ఉపపత్తి:— [illegible]

$$a + a.r + a.r^2 + a.r^3 + \ldots\ldots a.r^{n-1} = \text{సర్వధనము}$$

[illegible] $a.r \times r = a.r^2$ అగుచున్నది. [illegible]

[illegible]

[illegible] ($r - 1$) [illegible]

$$\text{సర్వ} (r-1) = a.r - a + a.r^2 - a.r + a.r^3 - a.r^2 + \ldots$$

$a.r^n - a.r^{n-1}$ [illegible]

[illegible]

$$\text{సర్వ}(r-1) = a.r^n - a = a(r^n - 1)$$

$$\therefore \text{సర్వధనము} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \text{ అగుచున్నది.}$$

[illegible] 1 [illegible]

[illegible]

[illegible] 1 [illegible]

[illegible]

[illegible]

(56. [illegible]) [illegible].

ఉదాహరణాంతరం

ఆదిర్ద్వయం సఖే వృద్ధిః ప్రత్యహం త్రిగుణోత్తరా।
గచ్ఛః సప్తదినం యస్మిన్ గణితం తత్ర కిం వద॥ ౬౩॥

వ్యాఖ్య. ఆదిః = ౨ గుణోత్తరము ౩ గచ్ఛః ౭ లబ్ధం గణితం ౨౧౮౬.

తా॥ మిత్రమా! ఆదిధనము 2 ఉత్తరోత్తరము మూడంతలు పూర్వోదితధనముగను 7 దినములు ఆగు చున్నా వచ్చు ? ఆయిన సర్వధనమెంత ? చెప్పుము.

ఆది 2 గుణకచయము 3 గచ్ఛ 7 వినుము సంఖ్య వ్రాసిన

7	×	2187	గుణవర్గఫలము 2187 అగుచున్నది. ఇందు 1చే తీసివేసి
6	వ	729	(గు—1)=3—1=2 చే భాగించిన 2186 ÷ 2=1093 దీనిని ఆది
3	×	27	ధనము 2చే గుణించిన 2186 సర్వధనము అగుచున్నది.
2	వ	9	
1	×	3	
0	వ	1	

సమాదివృత్తజ్ఞానాయ కరణసూత్రం సార్ధార్యా.
పాదాక్షరమితగచ్ఛే గుణవర్గఫలం చయేఽద్వికే తు॥ ౬౭॥
సమవృత్తానాం సంఖ్యా తద్వర్గో వర్గవర్గశ్చ।
స్వస్వపదోనౌ స్యాతాం అర్ధసమానాంచ విషమాణామ్॥ ౬౮॥

టీ॥ పాదాక్షరమితగచ్ఛే = ఎన్ని అక్షరములుగల పాదముతో ఛందస్సు యొక్క పాదాక్షరములు, పాదాక్షరతుల్యములగు సంఖ్య గచ్ఛముగనుండ ద్వికచయే = రెండు గుణకమైన చయే = చయముగనుండగా నైన గుణవర్గఫలం = (పూర్వోక్త రీతిగ సాధింపబడిన) గుణవర్గఫలము సమవృత్తానాం = సమవృత్తములయొక్క సంఖ్యా = సంఖ్య యగుచున్నది.

తద్వర్గః = సమవృత్తసంఖ్యావర్గమున్ను వర్గవర్గశ్చ = సమవృత్తసంఖ్యా వర్గవర్గమున్ను స్వస్వపదోనౌ = (క్రమముగ) తమతమ వర్గమూలములచే తీసివేయబడినవై (క్రమముగ) అర్ధసమానాం = అర్ధసమవృత్తములయొక్కయు విషమాణాంచ విషమవృత్తములయొక్కయు (సంఖ్యలై) స్యాతాం = అగుచున్నవి.

165. వ్యా. (1) ఇదివరలో (134 వ్యా) ఆరోహ ఛందములవలన పుట్టిన సమవృత్తముల సంఖ్య, నెయ్యంగు వచ్చుటయు ఏకద్విత్ర్యాదిమగుగ భేదసంఖ్య నెయ్యంగుటయు చెప్పబడినది. అందు సమవృత్తసంఖ్య విధంబు చెప్పు రీతియో ఆసంఖ్య ఘాతమూలకము గాగల 2 వలన నైన ఫలముగో సమముగ నున్నదనియు చూపింపబడినది. అది స్పష్టముగ చెప్పబడుచున్నది. 2 గుణకచయము. పాదాక్షరసంఖ్య గచ్ఛ. అట్లు భావించి చేయగావలెను గుణవర్గఫలము సమవృత్తసంఖ్య యగును.

(2) సమవృత్తసంఖ్యావర్గమువలన సమవృత్తసంఖ్యను తీసివేయగా వచ్చు శేషము అర్ధసమవృత్తసంఖ్య యగును.

(3) సమవృత్తసంఖ్యావర్గవర్గమువలన సమవృత్తసంఖ్యావర్గమును తీసివేయగా వచ్చు శేషసంఖ్య విషమవృత్తసంఖ్య అగుచున్నది.

ఉదాహరణమ్

సమానామర్ధతుల్యానాం విషమాణాం పృథక్ పృథక్।
వృత్తానాం వద మే సంఖ్యాం అనుష్టుప్ఛందసి ద్రుతమ్॥ ౭౦॥

వ్యాఖ్య. ఉత్తరోద్వయం గుణః ౨ గచ్ఛః ౮ లబ్ధా సమవృత్తానాం సంఖ్యా ౨౫౬. తథా అర్ధసమానాంచ ౬౫౨౮౦ విషమాణాంచ ౪౨౯౪౯౦౧౭౬౦.

ఇతి శ్రేఢీవ్యవహారః.

అనుష్టుప్ఛందమునందలి సమవృత్తములు అర్ధసమవృత్తములు విషమవృత్తములు వాటిసంఖ్యను నాకు వేర్వేరు శీఘ్రముగ చెప్పుము.

గుణకచయము 2	గచ్ఛ 8 ఇది సమసంఖ్య వ్రాసిన 256 సమవృత్తసంఖ్య.
8 వ 256	దీనివర్గము 65536 వలన 256 ను తీసివేయగా 65280 అర్ధ
4 వ 16	సమవృత్తసంఖ్య. అట్లు సమవృత్తసంఖ్యా 256 వర్గవర్గము
2 వ 4	65536 యొక్క వర్గము. 4294967296 వలన 65536 ను
1 × గుణకము 2	తీసివేయగా 4294901760 ఇది విషమవృత్తసంఖ్య యగు
0 వ 1	చున్నది యని తాత్పర్యము.

ఉపపత్తి :— సమవృత్తసంఖ్య, పాదాక్షరసంఖ్య ఘాతమూలకముగాగల 2 వలననైన ఘాతఫలము నగునని యిదివరలో చెప్పబడినది. (134 వ్యా. ఉ 1 చూ)

సమార్ధవృత్తలక్షణము వృత్తరత్నాకరమునందు:

శ్లో॥ అంఘ్రయోయస్య యుజోస్తుల్యలక్షణం తత్సమోచ్యతే। వృత్తం సంప్రవదాంత్యర్ధసమం విషమమన్యథా॥ యస్య పాదచతుష్కేపి లక్ష్మభిన్నం పరస్పరం। తదాహుర్విషమం వృత్తం ఛందశ్శాస్త్రవిశారదాః॥

టీ॥ పద్యమునకు 4 పాదములుండును. ఈ నాలుగుపాదములును ఒకే లక్షణముగలవియగునేని అవృత్తము సమవృత్తము. ప్రథమ తృతీయపాదములు ఒక లక్షణముగలవి, ద్వితీయ చతుర్థపాదములు మరియొక లక్షణముగలవియగునేని నా వృత్తము అర్ధసమవృత్తము. నాల్గుపాదములు భిన్నలక్షణములుగలవియగునేని విషమవృత్తము. అట్టి అర్ధసమవృత్తములు సమవృత్తసంఖ్యనుబట్టి ఎట్లనగ ప్రశ్న యందు చెప్పబడినట్లు అంకపాశవ్యవహారముచే ఈ సూత్రము చెప్పబడినది. అందు అర్ధసమవృత్తలక్షణమునుబట్టి రెండుపాదములు ఒకవిధముగను తక్కినరెండుపాదములు మరియొకవిధముగను ఉండుటయని వృత్తిము గాన సమవృత్తసంఖ్య యా అనుకొనినచో అంకపాశమునందలి "స్థానాంతమేకాదిచయాంకఘాతః" ఇత్యాది సూత్రముచే యా(యా — 1) = అర్ధసమవృత్తసంఖ్య అగుచున్నది. (217 ప. చూ)

$\therefore$ యా(యా — 1) = యా^{2} — యా = సమవృత్తసంఖ్య^2 — సమవృత్తసంఖ్య = అర్ధసమవృత్త. విషమవృత్తములు రెండువిధములవవచ్చును [1] సమవృత్తములను అర్ధసమవృత్తములను కానివి [2] నాల్గుపాదములను పరస్పరభిన్నలక్షణములు గలిగియుండునవి. వృత్తరత్నాకరమునందలి పైశ్లోకమునందు ఈ లక్షణమే చెప్పబడినది. భాస్కరాచార్యోక్తసూత్రముచే ఈ [2] విషమవృత్తసంఖ్య తెలియబడును. అందుకై నా వ్యాసం. సుధాకరులసూత్రము.

సమవృత్తపదైర్యేన ద్విగుణేన విహీనితః।
అర్ధతుల్యపదైర్గానో హ్యనయా స్థిత్యా సాధితః॥
శేషాం విషమజాతీనాం తద్విధానాం చ విద్యతే।
వృత్తరత్నాకరోక్తానాం తత్సోస్య భాస్కరోదితః॥

టీ॥ అర్ధసమవృత్తసంఖ్యనుండి సమవృత్తసంఖ్యను రెట్టించి తీసివేయగా శేషమునందు ఒకటికలిపి వర్గింపుము. ఆవర్గమునుండి 1ని తీసివేయుము. అదివిషమవృత్తసంఖ్య వృత్తరత్నాకరోక్తలక్షణము చేయును.

ఉపపత్తి: సమవృత్తసంఖ్య = యా పైనచూపిన అంకపాశసూత్రముచే

యా $\times$ (యా — 1) $\times$ (యా — 2) $\times$ (యా — 3) = విషమవృత్తసంఖ్య

$= \{$యా $\times$ (యా — 3)$\} \times \{($యా — 1) $\times$ యా — 2$)\}$

$=$ (యా^{2} — యా3) $\times$ (యా^{2} — యా3 + 2)

$=$ (యా^{2} — యా3 + 1) $\times$ (యా^{2} — యా3 + 1) — 1

$=$ (యా^{2} — యా — 2యా + 1) $\times$ (యా^{2} — యా — 2 యా + 1) — 1

(యా^{2} — యా) = అర్ధసమవృత్తసంఖ్య అనుటచే

$=$ (అర్ధసమవృసం — 2 సమవృసం + 1)^2 — 1 = విషవృసం. అగుచున్నది.

ఇట్లు సుధాకరసూత్రము యుపపన్నమగుచున్నది.

భాస్కరాచార్యులవారు మూలసూత్రమందు చెప్పినపద్ధతి [1] విషమవృత్తముల సంఖ్యను తెలియజేయుచున్నది. కాని తెలిపినట్టి లక్షణము వృత్తరత్నాకరలక్షణమునకు భిన్నముగనున్నది. వృత్తరత్నాకరవ్యాఖ్య (నారాయణీయము) అందు సమవృత్తములు అర్ధసమవృత్తములును కానిని విషమవృత్తము లనియు చెప్పబడినది (కేదారభట్టీయము 58 టీక చూ)

అట్టివిషమవృత్తసంఖ్య యా = సమవృత్తసంఖ్య అనుకొనుచో

(యా^{2} — 1)యా^{2} = యా^{4} — యా^{2} = సమవృసం^{4} — సమవృసం^{2} అగుచున్నది. వివరముగనూ అంకపాశమును చూడవలెను.

శ్రేఢీవ్యవహారమును సంబంధించినవి శేషములు.

146. ప్ర. ప్ర. గుణోత్తరశ్రేఢీఫలానయనమందును మూలధనవృద్ధిగణనము సను (144 ప్ర. 50 ప్ర) చెప్పబడిన ఆధీనసూత్రానయనము సత్సమ్మతియందు ననుసరించినను.

ఉదా: సంవత్సరము 1కి రూ 100 కి వడ్డీ రూ. 5 చొ॥ రూ 200లకు 11 సంవత్సరములకును ఎంతయగును ?

ఈప్రశ్న మునందు ఒకసంవత్సరమునకైనవృద్ధి నవాంశకములో చెప్పవలెను మన్నచో అన్ని పరంకుపనలకు భోగింపబడుటను వ్యాంతానుబంధవిధిచే మూలధనముతో కలుపవలయును. (75 ప్ర). 1 వికే. చూ) అట్లు చేయగా

ఒక సంవత్సరమునకు రూ 600 లకు 30 రూపాయలు వడ్డీ. [illegible] అనుచున్నది. [illegible]

600 + [illegible] (75 ప్ర. చూ)

ఇచట [illegible] ఏకాదశ (11) ఘాతమునకు [illegible] 600చే గుణించవలెను. అని స్పష్టమగుచున్నది.

147. ప్ర. గుణోత్తర(శ్రేఢియందును ఆది, చయము, పద, సర్వధనములలో [illegible] సర్వధనానయనము చెప్పబడినది (144 ప్ర. చూ) అట్లే [illegible] తెలియవలెను. అది తెలియుటకు

$$\therefore \text{సర్వధన} = \frac{\text{ఆ}(\text{గు}^{\text{ప}} - 1)}{\text{గు} - 1} \therefore \text{సర్వధన}(\text{గు} - 1) = \text{ఆ}(\text{గు}^{\text{ప}} - 1)$$

$$\therefore \frac{\text{సర్వ} \times (\text{గు} - 1)}{\text{గు}^{\text{ప}} - 1} = \text{ఆ}$$ అగుచున్నది.

అట్లే పదము తెలియుటకు [illegible]

$$\because \text{సధ} \times (\text{గు} - 1) = \text{ఆ}(\text{గు}^{\text{ప}} - 1) \therefore \frac{\text{సధ} \times (\text{గు} - 1)}{\text{ఆ}} + 1 = \text{గు}^{\text{ప}}$$

అట్లు వచ్చిన సంఖ్యను గుణకముచే ఎన్నిమార్లు భాగించినచో [illegible] 1 లబ్ధమగునో ఆ సంఖ్య పదము [illegible]

148. ప్ర. [illegible] శ్రేఢీవ్యవహార సంబంధముగ కొన్ని ప్రశ్నలు చూపబడినవి. అందు కొన్ని చూపబడుచున్నవి.

(1) [illegible] 8 మైళ్ళు నడచును. [illegible] 32 మైళ్ళు నడచును. [illegible] 12 దినములకు [illegible] ఎన్ని దినములలో కలియును?

ఇచట [illegible] దినమునకు 32 − 8 = 24 మైళ్ళు ఎక్కువ నడచును. కాని [illegible] 8 × 12 = 96 మైళ్ళు [illegible]

[illegible] దినమునకు 24 మైళ్ళు ఎక్కువ నడచునచో 96 మైళ్ళు ఎన్ని దినములకు ఎక్కువ [illegible]? 96 ÷ 24 = 4 దినములకు, [illegible]

[2] [illegible] 5 [illegible] 7 [illegible] 7 [illegible] 9 [illegible] 9 [illegible] 11 [illegible] 13 [illegible]?

[illegible]

[3] [illegible] 8 మైళ్ళు [illegible] 8 మైళ్ళు [illegible] 31 మైళ్ళు [illegible]? [illegible] (140 ప్ర. చూ)

$$\text{సధ} = \left\{ (\text{ప} - 1) \times \frac{\text{చ}}{2} + \text{ఆ} \right\} \times \text{ప} = \text{ప} \times \text{మధ్యగతి}$$

$$\therefore (\text{ప} - 1) \times \frac{\text{చ}}{2} + \text{ఆ} = \text{మధ్యగతి}$$

$$\therefore \text{ప} - 1 = (\text{మధ్యగతి} - \text{ఆ}) \div \frac{\text{చ}}{2}$$

$$\therefore \text{ప} = (\text{మధ్యగతి} - \text{ఆ}) \div \frac{\text{చ}}{2} + 1$$ అగుచున్నది.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

మొదటివరుస గోళములు = యా = యా 1

2 వ వరుస గో = (యా + 1) 2 = యా 2 + (2 × 1)

3 వ వరుస గో = (యా + 2) 3 = యా 3 + (3 × 2)

— — — — — — — —

ఇట్లు కడపటివరుస గో = {యా + (న − 1)} న = యా న + {(న − 1) న}

∴ గోళరాశి = యా + యా 2 + యా 3 .... + యా న

+ (2 × 1) + (3 × 2) + (4 × 3) ... (న − 1) న

ఇందు యా (1 + 2 + 3 ... న) = యా × $\frac{(న+1)న}{2}$ (128 ప్ర. చూ)

ఇచట మనకు ఇట్లు న (న − 1) = న^2 − న కావున

(2 × 1) + (3 × 2) + (4 × 3) ...... + న (న − 1)

= (2^2 − 2) + (3^2 − 3) + (4^2 − 4) ...... + (న^2 − న)

= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 ...... + న^2) − (1 + 2 + 3 + 4 ...... న)

= (137 ప్ర. 138 ప్ర. చే) $\left\{\frac{2న+1}{3} \times \frac{(న+1)న}{2}\right\} - \left\{\frac{(న+1)న}{2}\right\}$

∴ గోళరాశి = యా × $\frac{(న+1)న}{2} + \left\{\frac{2న+1}{3} \times \frac{(న+1)న}{2}\right\} - \left\{\frac{(న+1)న}{2}\right\}$

= $\frac{(న+1)న}{2} \times \left\{యా + \frac{2న+1}{3}\right\} - \left\{\frac{(న+1)న}{2}\right\}$

= $\frac{(న+1)న}{2} \times \left\{\frac{యా 3 \times 2న + 1}{3} - 1\right\}$

= $\frac{(న+1)న}{2} \times \left(\frac{యా 3 + 2 న - 2}{3}\right)$

= మ.న × $\frac{2(యా + న - 1) + యా}{3}$ = గోళరాశి

దీనింబట్టి అయుతక్షేత్రమందలి గోళరాశియొక్క శిఖరగోళసంఖ్యతోడను వరుససంఖ్యనుకలిపి అందు 1 తీసి ద్విగుణీకరించి 2 చే గుణించి అందు శిఖరగోళసంఖ్యనుకలిపి 3 చే భాగించి వరుసంఖ్యచేత సంకలితమును చేసిన గోళరాశియగునని తెలియుచున్నది.

ఉదా: శిఖరరాశి 6 వరుసలు 5 గోళరాశియెంత?

సూత్రముచే $\frac{2(6+5-1)+6}{3} \times \frac{(5+1)5}{2}$ = గోళరాశి

= $\frac{2 \times 10 + 6}{3} \times \frac{6 \times 5}{2} = \frac{26 \times 6 \times 5}{3 \times 2}$ = 26 × 5 = 130 గోళరాశి

ఇందు మొదటివరుస 6, రెండవవరుస 14, మూడవవరుస 24, నాల్గవవరుస 36, ఐదవవరుస 50, మొత్తము 130 అగుచున్నది.

శ్రేఢీవ్యవహారము 14 వ ప్రకరణము

సమాప్తము.

---

15 వ ప్రకరణము.

క్షేత్రవ్యవహారము.

149. ప్ర. క్షేత్రవ్యవహారమునందుపయోగించు కొన్ని ముఖ్యములగు రేఖాగణితపరిభాషలు ఈదిగువ వ్రాయబడుచున్నవి.

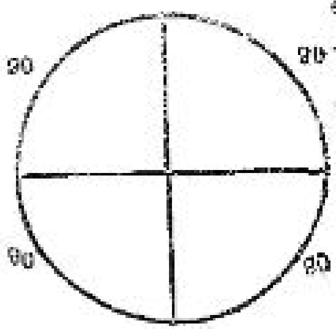
వ (1) పొడవువెడల్పు లావువున్ను లేనిదియు నిర్ణయించుటకు అర్హమైనదిగా నున్నదియు నగు పదార్థము బిందువు అనిచెప్పబడును. . ఇదిబిందువు.

వ (2) పొడవుమాత్రముగలిగి వెడల్పులేనిది రేఖ యనబడును. —— ఇది రేఖ. రేఖయొక్క కొనలు బిందువులు (అంత్యబిందువులు) అనబడును. కావున రేఖయొక్క కొనలు బిందువులు. ఈరేఖ సరళరేఖ యనియును వక్రరేఖయనియును రెండు విధములు.

(3) పొడవువెడల్పు మాత్రమున్నగల భూతలము (తలము, ప్రతలము) అని చెప్పబడును. ప్రతలముయొక్క ప్రాంతములు రేఖారూపములై యుండును.

(4) అట్లు సరళములుగాని వక్రములుగానియైన రేఖారూపములగు ప్రాంతభాగములు (అవధులు లేక హద్దులు) గల భూతలము క్షేత్రమని చెప్పబడును.

(5) ఏ క్షేత్రముయందు మధ్యమందలి బిందువునకు సమదూరమందుండు రేఖ చుట్టును ఆవరించియున్నదో ఆక్షేత్రము వృత్తక్షేత్రము. అందలి బిందువునకు కేంద్రమని పేరు. ఆకేంద్రమునకు సమదూరమున నావరించియున్న రేఖ పరిధి.



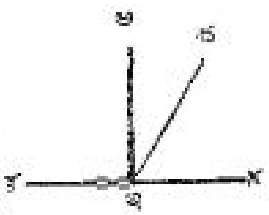
అపరిధియందలి యొకబిందువునుండి బయలుదేరి కేంద్రముమీదుగా వెళ్లి పరిధితో కలసిన సరలరేఖ ఆవృత్తమునకు వ్యాసమని చెప్పబడును. ఆవ్యాస రేఖయందు కేంద్రమునుండి పరిధియందలి యొకా నొకబిందువునకుపోవు ఖండము ఆ వ్యాస రేఖయొక్క సగభాగము వ్యాసార్ధమనియు త్రిజ్యయనియు చెప్పబడును. ఏవ్యాసమైనను ఆవృత్తక్షేత్రమును రెండు సమభాగములుగ విభజించును. పైచూపబడిన వృత్తక్షేత్రచిత్రమునందు తూర్పుపడమర దిక్కులగ పోవు నొకవ్యాసరేఖయు దక్షిణోత్తరములగ పోవు వ్యాసరేఖయు రెండు చూపబడియున్నవి. ఆరెండిటియొక్కయు సంయోగబిందువు కేంద్రము. కావున నొకవృత్తక్షేత్రమునకు వ్యాసరేఖలెన్నియైన కేంద్రమునందు సమానములుగ నున్నవి. మరియు వృత్తక్షేత్రమునందు చక్రాకారముగ నుండు రేఖయే పరిధియని చెప్పబడును. ఆపరిధిరేఖ కేంద్రమునుండి ఎటుచూచినను సమానదూరమున నున్నది. ఆవ్యాసరేఖచే వృత్తక్షేత్రము ఇరుపైపులయందును రెండుఖండములుగ విభజింపబడుచున్నది. అట్టి వృత్తక్షేత్రఖండములను అర్ధవృత్త మని చెప్పబడును. ప్రతివృత్తక్షేత్రమునకు పరిధి 360 సమభాగములుగ విభజింపబడినదైన ఆభాగములు భాగలని చెప్పబడుచున్నవి. ఆభాగలు అర్ధవృత్తమునందు 180 భాగలును వృత్తచతుర్థాంశమునందు 90 భాగలును పట్టియుండును.

(6) ఒకస్థానమునుండు రెండురేఖలు కలయుటచే నడుమ నున్న మొనసందే ప్రదేశము కోణమని చెప్పబడును. 'ప' అనుస్థానము నుండి బయలువెడలిన 'ప' రేఖయును 'గ' స్థానమునుండి బయలువెడలిన 'గ' రేఖయును క బిందువునందు కలియుట చే నేర్పడిన సన్నమగు మొనయగు సందును ప్రదేశము కోణమని చెప్పబడును. ఈకోణమును పకగ కోణమనియును గకప కోణమనియును వ్యవహరించు



చున్నారు. ఇందు ప రేఖయును గ రేఖయును గకప కోణమునకు భుజాద్వయము లగుటచే గకప కోణభుజాద్వయరేఖలని చెప్పబడును. ఈ గకప కోణమును క కోణమని యును వ్యవహరింపవచ్చును.

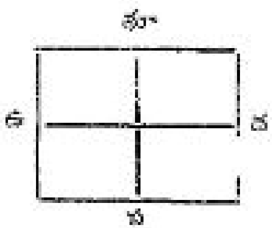
(7) ఒకసరళరేఖయందు మరియొకసరళరేఖయొక్క కొన తాకినచో ఆయాధార రేఖయొక్క యొకపైపునను గల కోణములు రెండును పరస్పరము సమానములగుచో ఆకోణములు సమకోణములని చెప్పబడును. అట్టి సరళరేఖలయందు ఏరేఖయొక్క పతనముచే కోణములేర్పడెనో ఆపతితరేఖ ప్రతిపాతరేఖ యందు లంబమని చెప్పబడును. ఇందు కగ సరళరేఖ యందు అఇ రేఖ ఇ బిందుప్రదేశమున కలియుచున్నది. అట్లు కలియుటచేనైన అఇక కోణమును అఇగ కోణ మును పరస్పరము సమములగుటచే అఇ రేఖ కగ రేఖ యందు లంబరేఖ యగుచున్నది. కావున నీ అఇక, అఇగ కోణములు సమకోణములని చెప్పబడును. ఆయు

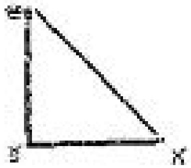


కగ రేఖ యందు ఇ బిందువునందు చఇ రేఖయొక్క కలయికచే, చఇక కోణ మును చఇగ కోణమును కలుగుచున్నవి. ఇవిరెండును పరస్పరము సమములు గాక, ఒకటి పెద్దదియు నొకటి చిన్నదియు నగుటచే నివి సమకోణములు కానేరవు. చఇ రేఖయు లంబరేఖ కానేరదు. ఇందు చఇక కోణము సమ కోణముకంటె పెద్దదియగుటచే అధికకోణమని చెప్పబడును. చఇగ కోణము సమకోణముకంటె చిన్నదియగుటచే అల్పకోణమని చెప్పబడును. అట్లు అఇచ కోణమును అల్పకోణమనియే చెప్పబడును.

ఏలినను ఇట్లు గ్రహింపవచ్చును.

ఇదివరలో చూపిన వృత్తక్షేత్రము (పై ప్ర. చూ) నందు పూర్వాపర వ్యాసమునందు దక్షిణోత్తరవ్యాసరేఖయొక్క కలియుటచే కేంద్రమునందు ౪ కోణము లేర్పడుచున్నవి. అందొకపైపునందలి రెండుకోణములు పర స్పరము సమములగుచున్నవి. అట్లు సమములగుటచేతనే పూర్వాపరవ్యాసమునకు దక్షిణోత్తరవ్యాసము లంబరూపమగుచున్నది. దీనిబట్టి కోణబిందువునందు కర్కటయంత్రము (కంపాసు) యొక్క ఒకముల్లునునిచి ఇష్టవ్యాసార్ధముచే రెండవ ముల్లును త్రిప్పుటచేనైన వృత్తముయొక్క పరిధి చతుర్థాంశము (90భాగల





(13) నాలుగుభుజములును సమానములై సమకోణములుగల చతురస్రమును వర్గక్షేత్రము.

(14) కోణములు సమకోణములై అభిముఖభుజములు పరస్పర తుల్యములుగా నుండు చతురస్రమును ఆయతము. ఈచతురస్రములందు క్రింది భుజమునకు ఆధారమనియు, భూమియనియు చెప్పబడును. పైభుజము ముఖమనియు, ప్రక్కనున్న భుజములు భుజములనియు చెప్పబడును. అన్నిచతురస్రములందును ఒకకోణమునుండి దాని కభిముఖకోణమునకు గీయబడిన సరళరేఖ కర్ణమని చెప్పబడును.

(15) నాల్గుభుజములును సమములై అభిముఖకోణములు మాత్రమే తుల్యములగు చతురస్రమును సమచతుర్భుజము.

(16) ఏచతురస్రముయొక్క కోణములు నాల్గును ఒకక్షేత్రమువలన కల్పింపబడిన కేంద్రమునుండి చేయబడిన వృత్తపరిధిని స్పృశించునో ఆచతురస్రమును వృత్తాంతర్గతచతురస్రము. కొన్నిచతుర్భుజములు ఆయా ప్రదేశములందు అవసరమునుబట్టి వివరింపబడును.

అథ క్షేత్రవ్యవహారః

తత్ర భుజకోటిస్వరూపం

ఇష్టో బాహు ర్యస్స్యాత్తత్స్పర్ధిన్యాం దిశీతరో బాహుః।
త్ర్యస్రే చతురస్రే వా సా కోటిః కీర్తితా తజ్జ్ఞైః॥ ౬౫॥

టీ॥ యః = ఏ, ఇష్టః = ఇష్టమైనది, బాహుః = భుజము, స్యాత్ = అగునో, తత్స్పర్ధిన్యాం = ఆభుజమునకెదురుగ (ప్రతికూలముగ)నున్న, దిశి = దిక్కునందు, ఇతరః = రెండవదియగు, బాహుః = భుజము (ఉండునో) సా = ఆరెండవభుజ, తజ్జ్ఞైః = క్షేత్రగణితజ్ఞులచే, త్ర్యస్రే = త్రిభుజక్షేత్రమందుగాని, చతురస్రే వా = చతుర్భుజక్షేత్రమందుగాని, కోటిః = కోటియని, కీర్తితా = చెప్పబడినది.

తా॥ త్రిభుజమునందు సమకోణమును సంబంధించిన భుజములలో నేదో నొకటి భుజమగునో దానియొక్క లంబముగానున్న రెండవభుజమును కోటియని చెప్పబడును. (148 ప్రశ్న. 10 పం. చూ).

అథ భుజకోటికర్ణానామన్యతమేనాజ్ఞాతే తదితరజ్ఞానాయ కరణ సూత్రం వృత్తం.

తత్కృత్యోర్యోగపదం కర్ణో దోఃకర్ణవర్గయోర్వివరాత్।
మూలం కోటిః కోటిశ్రుతికృత్యో రంతరాత్పదం బాహుః॥ ౬౬॥

టీ॥ తత్కృత్యోః = ఆభుజకోటివర్గములయొక్క, యోగపదం = యోగముయొక్క మూలము, కర్ణః = కర్ణము. దోఃకర్ణవర్గయోః = భుజకర్ణములయొక్క, కర్ణమునొయొక్కయు, వర్గములయొక్క, వివరాత్ = అంతరమువలన, మూలం = మూలము, కోటిః = కోటియగును. కోటిశ్రుతికృత్యోః = కోటియొక్కయు కర్ణముయొక్కయు, వర్గములయొక్క, అంతరాత్ = అంతరమువలన పదం = మూలము. బాహుః = భుజము అగును.

150. ప్ర. తా॥ జాత్యత్రిభుజమునందు భుజవర్గ కోటివర్గముల కూడిక వర్గమూలమును గనుగొనినచో నాదియగు కర్ణమగును. కర్ణవర్గమువలన భుజవర్గమును వ్యవకలించగ శేషమునకైన వర్గమూలము కోటియగును. కర్ణవర్గమువలన కోటివర్గమును వ్యవకలించగ శేషమునకైన వర్గమూలము భుజమగును.

అత్రోద్దేశకః.

కోటి శ్చతుష్టయం యత్ర దోస్త్రయం తత్ర కా శ్రుతిః।
కోటిం దోఃకర్ణతః కోటిశ్రుతిభ్యాం చ భుజం వద॥ ౬౭॥

తా॥ కోటి ౪, భుజ ౩, అటుల కర్ణమెంతయుండును? భుజకర్ణములవలన కోటిని చెప్పుము. కోటికర్ణములవలన భుజమును చెప్పుము.

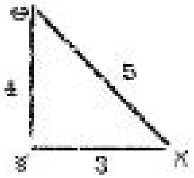
న్యాసః. కోటిః ౪ భుజః ౩ భుజవర్గః ౯ కోటివర్గః ౧౬ ఏతయోర్యోగాత్ ౨౫ మూలం ౫ కర్ణో జాతః

అథ కర్ణభుజాభ్యాం కోట్యానయనం

న్యాసః. కర్ణః ౫ భుజః ౩ అనయోర్వర్గాంతరం ౧౬ ఏతన్మూలం ౪ కోటిః

అథ కోటికర్ణాభ్యాం భుజానయనం

న్యాసః. కర్ణః ౫ కోటిః ౪ అనయోర్వర్గాంతరం ౯ ఏత న్మూలం ౩ భుజః.



ఈక్షేత్రమునందు అక = కోటి = 4, కగ = భుజ = 3 అగ = కర్ణము = 5 ఇట్లు భుజకోటికర్ణములు గలవు. ఇందు కర్ణము తెలియవలెనన్న భుజకోటులచే కర్ణము తెలియగవచ్చును ఎట్లనగా:—

పైపద్ధతిచే భు^{2} + కో^{2} = క^2

∴ అక^2 + కగ^2 = అగ^2 = $4^2 + 3^2 = 5^2$

కావున కోటి 4 వర్గము 16. భుజ 3 వర్గము 9. రెండిటియొక్క యోగము 16 + 9 = 25 కర్ణవర్గము. కావున 25 యొక్క వర్గమూలము 5 కర్ణ మగుచున్నది.

పైక్షేత్రమునందే భుజయును కర్ణమున్ను తెలిసి కోటి తెలియవలెనన్న క^2 — భు^{2} = కో^{2} అగుచున్నది. అనగా అగ^2 — కగ^2 = అక^2 కావున $5^2 - 3^2 = 4^2 = 25 - 9 = 16$ దీనియొక్క మూలము 4 కోటియగుచున్నది.

అట్లు కోటికర్ణములు తెలిసి భుజ తెలియవలెనన్న

క^2 — కో^{2} = భు^{2} ∴ అగ^2 — అక^2 = కగ^2 ∴ $5^2 - 4^2 = 3^2 = 25 - 16 = 9$

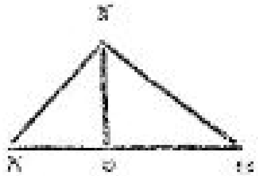
∴ 9 యొక్క వర్గమూలము 3 భుజ యగుచున్నది.

వివరము:— [illegible]

[illegible]

పైపద్ధతియొక్క ఉపపత్తి :—

[illegible]



[illegible]

అగ కర్ణము అగునో, కగ భుజ, కగ కర్ణముగునో గల భుజ.

కావున, $\frac{కగ \times కగ}{అగ}$ = గల అగుచున్నది.

ఇట్లు అగ కర్ణముగునో, అక కోటి, అగ కోటియగునో అల కోటి.

కావున, $\frac{అక \times అక}{అగ}$ = అల అగుచున్నది.

అపుడు అగ = అల + గల ∴ $\frac{కగ \times కగ}{అగ} + \frac{అక \times అక}{అగ}$ = అగ

సమచ్ఛేదములుగ చేసి శేషములను విడువగా

$$\frac{(కగ \times కగ) + (అక \times అక)}{అగ} = \frac{అగ \times అగ}{అగ}$$

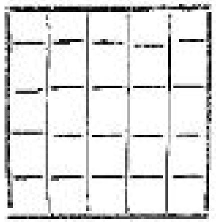
$\therefore$ $కగ^2 + అక^2 = అగ^2$ అనగా $భు^2 + కో^2 = క^2$ అగుచున్నది.

$\therefore \sqrt{కగ^2 + అక^2} = \sqrt{భు^2 + కో^2} = \sqrt{కర్ణ^2} = \sqrt{అగ^2} = కర్ణ$

$\because భు^2 + కో^2 = క^2 \therefore భు^2 = క^2 - కో^2$ ఇట్లు $కో^2 = క^2 - భు^2$

క్షేత్రగణిత పద్ధతిననుసరించియు ఋజువగుచున్నది.

ఉపపత్తి : వర్గము సమచతురశ్రమును ఆకారముగాకలదని చూపింపబడును. అనగా పొడవును వెడల్పును సమానముగాగల చతురశ్రపువర్గ



ఫలము (13 పే. 149 ప్ర. చూ) ఇచట చిత్రమునందు వర్గ క్షేత్రము చూపబడినది. ఇది 5 అంగుళముల పొడవును 5 అంగుళముల వెడల్పునుగల చతురశ్ర మగును. ఇందు 25 గళ్ళు అగుపడుచున్నవి. ఒక్కొక్కగది ఒక అంగుళము పొడవును అంతేవెడల్పును కలిగియున్నవి. ఇదియే చతురశ్రపు అంగుళమని చెప్పబడును. మొత్తము చతురశ్రమునందు 25 చతురశ్రపు అంగుళము లున్నవని తెలియుచున్నది. ఇందు ఒక మూలనుండి నిలువుగను అడ్డముగను 3 చొప్పున అంగుళములను తీసుకొని ఒక్కొక్కగదిగా నుంచుము. అన్నిటినుండి నిలువుగను అడ్డముగను చేయబడిన గీతలు కలిగియుండు చతురశ్రమునకు సరిపోవును. మిగిలినది మధ్యనుండెడి చతురశ్రమునందు వీనియొక్క వర్గము 9 చతురశ్రపు అంగుళము లుండును. ఇట్లు నాలుగు అంగుళములవరకును గుర్తించినచో 16 చతురశ్రపు అంగుళము లుండును. 16 చతురశ్రపు అంగుళములయొక్క యు 9 చతురశ్రపు అంగుళములయొక్కయు యోగము 25 చతురశ్రపు అంగుళములగుట ఇందు స్పష్టముగ గానవచ్చును. ఇట్లు 5 అంగుళములు వెడల్పు 5 అంగుళముల పొడవునుగల చతురశ్రమునందు ఎన్ని చతురశ్రపు అంగుళములు లుండునో అదే చతురశ్ర మందు 25 చతురశ్రపు అంగుళములు అని వర్గక్షేత్రఫల మగుచున్నది. ఈ 5 అంగుళముల యొక్క భుజము గలవానికి ఉన్న చతురశ్ర మగును. గుణకారము వలన చతురశ్రపుఫలము. ఇట్లు పొడవు వెడల్పుల గుణనము చేసిన చతురశ్ర ప్రమాణము చేయగును. దీనినే శాస్త్రకారులు ఫలమనియు గణితమనియు

వ్యవహరించి యున్నారు. క్షేత్రఫలము ఏకరూపాయనియు, చతురశ్రమనియు వ్యవహరింపబడుచున్నది.

ప్రకారాంతరేణ వర్గయోగాద్యానయనసూత్రం సార్ధవృత్తం

రాశ్యో రంతరవర్గేణ ద్విఘ్నే ఘాతే యుతే తయోః।
వర్గయోగో భవే దేవం తయో ర్యోగాంతరాహతిః॥ ౬౭॥
వర్గాంతరం భవే దేవం జ్ఞేయం సర్వత్ర ధీమతా॥ ౬౮॥

టీ॥ రాశ్యోః = రెండు రాసులయొక్క, ఘాతే = గుణనము, ద్విఘ్నే = రెండుచే గుణింపబడినదై, అంతరవర్గేణ = రాశ్యంతరవర్గముతో, యుతే = కలుపబడినదై, తయోః = ఆ రాసులయొక్క, వర్గయోగః = వర్గయోగము, భవేత్ = అగును.

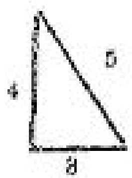
ఏవం = ఈప్రకారముగ, తయోః = ఆ రాసులయొక్క యోగాంతరాహతిః = యోగముయొక్కయు అంతరముయొక్కయు గుణనము, వర్గాంతరం = వర్గములయంతరము, భవేత్ = అగును. ఏవం = ఈప్రకారము, ధీమతా = బుద్ధిమంతునిచే, సర్వత్ర = అంతట, జ్ఞేయం = తెలియదగినది.

151. ప్ర. ఏరెండు రాసులను వర్గయోగము చేయవలయునో ఆరెండు రాసులను పరస్పరము గుణించి, రెండుచే గుణింపవలెను. అందు ఆరాసులను అంతరమును గుణించి, ఆ అంతరముయొక్కవర్గమును కలుపవలెను. ఇది వర్గయోగమగును.

రెండు రాసులను వర్గాంతరము తెలిసికొనవలెనన్నచో రాశియోగమును రాశ్యంతరముచే గుణింపవలెను. వర్గాంతరమగును. (104 ప్ర. 106 ప్ర. చూ.)

ఉపపత్తి : $(యా + కా) \times (యా - కా) = (యా^2 - కా^2)$ ఇది వర్గాంతరోపపత్తి. $(యా - కా)^2 = యా^2 + కా^2 - 2\,యాకా$ అగుచున్నది.

ఇందు 2 యా కా కలిపినచో $యా^2 + కా^2$ వీని వర్గయోగమే సిద్ధించుచున్నది. ఇది వర్గయోగోపపత్తి.



న్యాసః। కోటిశ్చతుష్టయం యత్ర దోస్త్రయం తత్ర కా శ్రుతిః। కోటిః ౪ భుజః ౩ అనయోర్ఘాతో ౧౨ ద్విఘ్నః ౨౪ అంతరవర్గేణ ౧ యుతే వర్గయోగః ౨౫ అస్య మూలం ౫ కర్ణః॥ అథ కర్ణభుజాభ్యాం కోట్యానయనం,

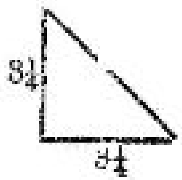
న్యాసః. కర్ణః ౫ భుజః ౩ అనయోర్యోగః ౮ పునరేతయో రంతరేణ ౨ ఘాతో వర్గాంతరం ౧౬ అస్య మూలం ౪ కోటిః— అథ భుజజ్ఞానం — కోటిః ౪ కర్ణః ౫. ఏవం జాతో భుజః ౩.

భుజకోటులను తెలిసి కర్ణము తెలియుటకు కోటి 4 భుజ 3, వీటిగుణకారము 12 దీనిని 2 చే గుణించ 24, ఇందు కోటిభుజాంతరము 4—3=1. దీనియొక్క వర్గము 1 దీని కలుప 25 కర్ణవర్గమగును. దీనిమూలము 5 కర్ణము. ఇట్లు భుజకర్ణములు తెలిసి కోటి తెలియవలెనన్న వానియోగము 5+3=8 అంతరము 5—3=2 చే గుణించ 8×2=16 దీనివర్గమూలము 4 కోటి. ఇట్లు (5+4)×(5—4) =9 దీనిమూలము భుజమగుచున్నది.

ఉదాహరణమ్.

సాంఘ్రిత్రయమితో బాహుర్యత్ర కోటిశ్చ తావతీ।
తత్ర కర్ణప్రమాణం కిం గణక బ్రూహి మే ద్రుతమ్॥

తా॥ భుజ 3¼ ఉన్నది. కోటియు 3¼ అంతయే యున్నది. ఆ క్షేత్రమునందు గణకుడా! కర్ణమెంతయగును? నాకు శీఘ్రముగ చెప్పుము.



న్యాసః భుజః ౧౩/౪ కోటిః ౧౩/౪ అనయోర్వర్గయోగః ౧౬౯/౮ అస్య మూలాభావాత్ కరణీగతమేవాయం కర్ణః.

ఇచట $\frac{13}{4}$ భుజ, కోటియు $\frac{13}{4}$, ఈ రెండింటియొక్కయు వర్గయోగము.

$$\left(\frac{13}{4}\right)^2 + \left(\frac{13}{4}\right)^2 = \frac{169}{16} + \frac{169}{16} = \frac{338}{16} = \frac{169}{8}$$

ఈసంఖ్యయొక్క వర్గమూలము లభింపదు. ఈవర్గమూలమే కర్ణమగును. అనగా ఈసంఖ్యకు పూర్ణాత్మక వర్గమూలము గలదు, అంశాత్మకవర్గమూలము లభింపదు. కావున ఆసన్న మూలము మాత్రము గ్రహింపవలయును, ఇట్లు వర్గమూలము లభింపని వర్గమూలములు గలిగిన సంఖ్య కరణియనిచెప్పబడును. అనగా, క $\frac{169}{8}$ = $\sqrt{\frac{169}{8}}$ అని వ్యక్తము గ్రహింపవలసియున్నది. (ఆసన్నమూలము 8 ప్ర. చూడుము.)

ఆసన్నమూలజ్ఞానార్థముపాయః కరణసూత్రమ్.

౧౩౭ సూత్ర. వర్గేణ మహతేష్టేన హతాచ్ఛేదాంశయోర్వధాత్।
పదం గుణపదక్షుణ్ణచ్ఛిద్భక్తం నికటం భవేత్॥ ఉ ౧/౩

అయం కర్ణవర్గః ౧౬౯/౮ అస్య చ్ఛేదాంశఘాతః ౧౩౫౨ అయం లక్షఘ్నః ౧౩౫౨౦౦౦౦౦ అస్యాసన్నమూలం ౧౧౬౨౭ ఇదం గుణమూల ౧౦౦ గుణితచ్ఛేదేన ౮౦౦ భక్తం లబ్ధమాసన్నపదమ్ ౧౪ ౪౨౭/౮౦౦ అయం కర్ణః ఏవం సర్వత్ర.

టీ॥ ఇష్టేన = అభీష్టమగు, మహతా = పెద్దదియగు, వర్గేణ = వర్గముచే, హతాత్ = గుణింపబడిన, ఛేదాంశయోః = హారలవములయొక్క, వధాత్ = గుణకారమువలన, పదం = వర్గమూలము, గుణపదక్షుణ్ణచ్ఛిద్భక్తం = గుణకారమైన పెద్దవర్గముయొక్క మూలముచే గుణింపబడినహారముచే భాగింపబడినది, నికటం = సమీపమూలము, భవేత్ = అగును. (దీనివివరమునకుపూర్వ 81 వ ప్ర. చూ. అచట వ్రాయబడినది గాక, వివర మిచ్చుచున్నారము.)

ఉదా॥ కర్ణమునకు కరణిగతమగువర్గము $\frac{169}{8}$ హారలవములచే లవమును గుణింప 169×8 = 1352 దీనిని 100 యొక్క వర్గము 10000 చే గుణింప 13520000 దీని

రాయొక్క నిరగ్రమూలము 3877, దీనిని హారము 8చే గుణింపబడిన 100చే భాగింపగ

$3877 \div 800 = \frac{3877}{800} = 4\frac{477}{800}$ ఇది కర్ణమని తెలియబడుచున్నది. దీనిని

దశాంశసంఖ్యలోనికి మార్చినచో 4.846 ఇట్లు అగుచున్నది.

ప్రశ్నములు.

[1] కోటి 400 లింకులు భుజ 300 లింకులు కర్ణమెంత ?

[2] కర్ణము 1000 లింకులు కోటి 600 లింకులు భుజయెంత ?

[3] కర్ణము 1500 లింకులు భుజ 900 లింకులు కోటియెంత ?

[4] ఒక లంబకోణక్షేత్రమునందు భుజ 300 లింకులు కోటి 800 లింకులు ఉండెను, దానికర్ణమెంతయుండును ?

[5] ఒకవర్గక్షేత్రమునందు భుజప్రమాణము 400 లింకులు. అందలికర్ణముయొక్క ఆసన్న మూలమును తెల్పుము.

[6] ఆవర్గక్షేత్రము కర్ణరేఖచే రెండుభాగములుగ చేయబడినచో ఒక్కొక భాగమునందలి చతురస్రమెంతయుండును ?

[7] ఒకజాత్యక్షేత్రమునందు కోటి 12 అంగుళములు భుజ 4·7 అంగుళములు. ఆక్షేత్రమునందలి కర్ణమెంత ?

[8] ఒకజాత్యక్షేత్రమునందు కర్ణము 1గజ మగుచున్నది. అందలి భుజ 0·292372, కోటి యెంతయుండును ?

[9] ఆక్షేత్రమునందు కోటి ·956305 ఉన్నచో భుజయెంత ?

త్ర్యస్రస్య జాత్యే కరణసూత్రం వృత్తద్వయమ్.

ఇష్టో భుజోఽస్మాద్ద్విగుణేష్టనిఘ్నా దిష్టస్యకృత్యైకవియుక్తయాప్తం।
కోటిః పృథక్సేష్టగుణా భుజోనా కర్ణో భవేత్త్ర్యస్రమిదంహి జాత్యం॥౧౩౨

ఇష్టో భుజస్తత్కృతిరిష్టభక్తా ద్విస్థాపితేష్టోనయుతార్ధితా వా।
తౌ కోటికర్ణావితి కోటితో వా బాహుశ్రుతీ వాకరణీగతే స్తః॥ ౧౩౩

టీ॥ ఇష్టోభుజః = (ఒక) ఇష్టసంఖ్యభుజము, ద్విగుణేష్టనిఘ్నాత్ = (రెండవ) ఇష్టాంకమును రెట్టించి దానిచే గుణింపబడిన, అస్మాత్ = మొదటియిష్టాంకమువలన, ఏకవియుక్తయా = ఒకటిచే తీసివేయబడిన, ఇష్టస్యకృత్యా = రెండవయిష్టాంకముయొక్క వర్గముచే, ఆప్తం = భాగింపగావచ్చినలబ్ధము, కోటిః = కోటియగును. పృథక్ = వేరుగ (ఉంచబడిన) సా = ఆకోటి, ఇష్టగుణా = (రెండవ) ఇష్టాంకముచే గుణింపబడినదై, భుజోనా = భుజచే తీసివేయబడినదైన, కర్ణః = కర్ణము, భవేత్ = అగును, ఇదం = ఈ త్ర్యస్రం = త్రిభుజము, జాత్యంహి = జాత్యము అగును.

వా = లేక, ఇష్టః = ఇష్టసంఖ్య, భుజః = భుజము, తత్కృతిః = ఆభుజవర్గము, ఇష్టభక్తా = రెండవయిష్టాంకముచే భాగింపబడినదై, ద్విస్థాపితా = రెండుచోట్ల స్థాపింపబడినదై, ఇష్టోనయుతా = (రెండవ) ఇష్టాంకముచే, ఒకచో తీసివేయబడినదియు, ఒకచో కలుపబడినదియునై, అర్ధితా = అర్ధింపబడినదైనచో, తౌ = ఆయర్ధింపబడిన సంఖ్యలు, కోటికర్ణౌ = కోటికర్ణములు, ఇతి = ఈప్రకారము, కోటితోవా = కోటివలననైనను, అకరణీగతే = కరణీగతములుకాని, బాహుశ్రుతీ = భుజకర్ణములు, స్తః = అగుచున్నవి.

౧౩౩ ప్ర. భుజవర్గముయొక్కయు కర్ణవర్గముయొక్కయు అంతరముయొక్క మూలము కోటియగును, కోటివర్గముయొక్కయు కర్ణవర్గముయొక్కయు అంతరముయొక్క మూలము భుజయగును, భుజవర్గముయొక్కయు కోటివర్గముయొక్కయు యోగముయొక్క మూలము కర్ణమగును. పరిమితసంఖ్యలు (అనగా నిరగ్రమూలసంఖ్యలు లేక ఆసన్నమూలసంఖ్యలు కానివి) యగునట్లు జాత్యక్షేత్రమునందలి భుజకోటికర్ణములు కల్పించు మార్గము.

1. రెండు ఇష్టసంఖ్యలను కల్పింపుము. మొదటి ఇష్టసంఖ్యయే భుజము. ఆభుజను ద్విగుణితమైన రెండవయిష్టాంకముచే గుణింపుము. దానిని రెండవయిష్టాంకముయొక్క వర్గమువలన ఒకటితీసివేయగావచ్చు సంఖ్యచే భాగింపగా వచ్చులబ్ధము కోటి. ఆకోటిని రెండవయిష్టాంకముచే గుణించి దానివలన భుజనుతీసివేయగా వచ్చుసంఖ్య కర్ణము. ఇది జాత్యత్రిభుజ మగును.

2. మొదటియిష్టసంఖ్య భుజ. ఆభుజవర్గమును రెండవయిష్టాంకముచే భాగించి రెండుస్థలములనుంచి ఒకచో రెండవయిష్టసంఖ్యను వ్యవకలింపుము. ఒకచో కలుపుము.

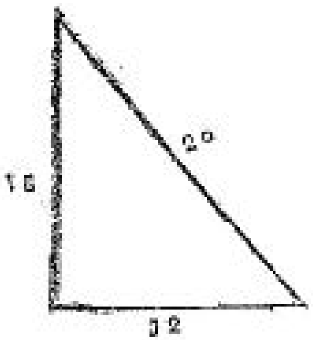
రెండించితివన్న అర్ధించగాను, అవి క్రిమముగ కోటికర్ణములగును. ఇట్లు కోటిచేతన ఇష్టము భుజకర్ణము లగును. అనగా ఆయా వాటి వర్గయోగవర్గాంతరముల వలన త్రిభుజాకార క్షేత్రముల కల్పించును.

ఉదాహరణం.

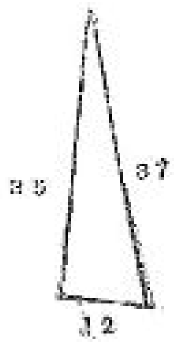
భుజే ద్వాదశకే యౌ యౌ కోటికర్ణావనేకధా।
ప్రకారాభ్యాం వద క్షిప్రం తౌ తావకరణాగ్రతః॥ ౨౦౫॥

న్యాసః భుజః ౧౨ ఇష్టమ్ ౨ అనేనద్విఘ్నేన ౪ గుణితో భుజః ౪౮ ఇష్ట ౨ కృత్యా ౪ ఏకోనయా ౩ భక్తో లబ్ధా కోటిః ౧౬ ఇయమిష్టగుణితా ౩౨ భుజోనా జాతః కర్ణః ౨౦ త్రిభిరిష్టేన వా కోటిః ౯ కర్ణః ౧౫ పంచభిర్వా కోటిః ౫ కర్ణః ౧౩ ఇత్యాది। అథద్వితీయప్రకారేణ భుజః ౧౨ అస్యకృతిః ౧౪౪ ఇష్టేనద్వికేన ౨ భక్తా లబ్ధమ్ ౭౨ ఇష్టేన ౨ ఊనం ౭౦ యుతం ౭౪ అర్ధితౌ జాతౌ కోటికర్ణౌ ౩౫, ౩౭ ఏవమిష్టేన చతుష్కేణ వా ౧౬, ౨౦ షట్కేన వా ౯, ౧౫.

తా॥ మనవతి ఇష్టాంకము 12 భుజ మగునో అనేకత్రికోణములుగ ఏయే కోటికర్ణములగునో ఆయా కోటికర్ణములను కరణీగతములుగాని వానిని శీఘ్రముగ చెప్పుము.



ఇచట 12 భుజము అనుకొనుచో, ఇష్టము 2 గాను నిర్ణయించినను దీని 2 చే గుణించ 4 దీనిచే భుజ 12 ను గుణించ 48 దీనిని ఒకటిచేత తీసివేయబడిన ఇష్ట 2 వర్గము 4 అనగా 4—1=3 చే భాగించ 16 ఇది కోటి, దీనిని 2 చే గుణించ 32 దీనినుండి భుజ్యూనించ 20 కర్ణము. ఇట్లు 3 ఇష్టసంఖ్య అగుచో ఆభుజ 12 వలన కోటికర్ణములు 9, 15 లగుచున్నవి. ఇష్టసంఖ్య 4 అగుచో కోటి 5 కర్ణము 13 అగుచున్నవి. ఇష్టసంఖ్య 5 అగుచో కోటి 5 కర్ణము 13 ఇట్లు ఇష్ట సంఖ్యల బట్టి ఆ 12 భుజమునకు పెక్కు కర్ణములు బహువిధములుగ రాగలవు.



(2) ప్రకారము ఇష్టసంఖ్య 2 అగుచో భుజ 12 వర్గము 144 ఇష్టము 2 చే భాగించ 72 ఇష్టముకలుప 74 ఇష్టమును వ్యవకలించ 70 అర్ధించ 37 కర్ణము, 35 కోటి, ఇట్లు ఇష్టము 4 అగుచో కర్ణము 20 కోటి 16 ఇష్టము 6 అగుచో కోటి 9, కర్ణము 15, ఇట్లు ఇష్టసంఖ్యలబట్టి ఒకే భుజమునకు అనేక విధములగు కోటికర్ణములగును. ఒకటే భుజమును కొనుచో రెండువిధ కోటియగును. కాన ఇట్లు కోటి వలన ఇష్టసంఖ్యనుబట్టి భుజకర్ణములగును.

(1) ఉపపత్తి: $\text{క} = \text{కో} \times \text{ఇ} - \text{భు}$ ఇట్లు కల్పించినచో
$\text{క}^2 = \text{కో}^2.\text{ఇ}^2 - 2\,\text{కో}.\text{ఇ}.\text{భు} + \text{భు}^2$ కావున

$$\text{క}^2 - \text{భు}^2 = (\text{కో}^2.\text{ఇ}^2 - 2\text{కో}.\text{ఇ}.\text{భు} + \text{భు}^2) - \text{భు}^2 = \text{కో}^2\text{ఇ}^2 - 2\,\text{కో}.\text{ఇ}.\text{భు}$$

$= \text{కో}^2$ రెండువైపులను కోటిచే భాగించ $\text{కో}.\text{ఇ}^2 - 2\,\text{ఇ}.\text{భు} = \text{కో}$

$$\therefore \text{కో}.\text{ఇ}^2 - \text{కో} = 2\,\text{ఇ}.\text{భు} = \text{కో}(\text{ఇ}^2 - 1) = 2\,\text{ఇ}.\text{భు}$$

$$\therefore \text{కో} = \frac{2\,\text{ఇ}.\text{భు}}{\text{ఇ}^2 - 1}$$ అగుచున్నది.

ఇది మొదటి ప్రకారమున ఉపపత్తి.

(2) ఉపపత్తి:—భుజ తెలిసినసంఖ్యగుటచే ఇష్టసంఖ్య కోటికర్ణాంతర మగుచో భుజవర్గము రాశిద్వయవర్గాంతరము. ఇష్టసంఖ్య రాశ్యంతరము ఇట్లు రాశిద్వయము తెలియబడును. (104 ప్ర. చూ) ఎట్లనగా:—

వర్గాంతరము $= \text{భు}^2$ రాశ్యంతరం $= \text{ఇ} \therefore \dfrac{\text{భు}^2}{\text{ఇ}} =$ యోగ

$$\frac{\text{యో} - \text{ఇ}}{2} = \left(\frac{\text{భు}^2}{\text{ఇ}} - \text{ఇ}\right) \div 2 = \text{కోటి}\quad \frac{\text{యో} + \text{ఇ}}{2} = \left(\frac{\text{భు}^2}{\text{ఇ}} + \text{ఇ}\right) \div 2 = \text{కర్ణము}.$$

అథేష్టకర్ణాత్ కోటిభుజానయనే కరణసూత్రం వృత్తం.

ఇష్టేననిఘ్నాద్ద్విగుణాచ్చ కర్ణాదిష్టస్య కృత్యైకయుజా యదాప్తం।
కోటిర్భవేత్సా పృథగిష్టనిఘ్నీ తత్కర్ణయోరంతరమత్ర బాహుః॥ ౨౦౬

ఇష్టవర్గేణ సైకేన ద్విఘ్నః కర్ణోఽథవా హృతః।
ఫలోన శ్రవణః కోటిః ఫల మిష్టగుణం భుజః॥ ౧౫౧

టీ॥ ఇష్టేన = ఇష్టాంకముచే, నిఘ్నాత్ = గుణింపబడినదియు, ద్విగుణాత్ = రెండుచే గుణింపబడినదియునగు, కర్ణాత్ = కర్ణమువలన, ఏకయుజా = ఒకటితో గూడినదగు, ఇష్టస్యకృత్యా = ఇష్టాంకముయొక్క వర్గముచే, యత్ లబ్ధం = (భాగింప) ఎంతలబ్ధమగునో (అది), కోటిః = కోటి, భవేత్ = అగును. సా = ఆకోటి. పృథక్ = వేరుగ, ఇష్టనిఘ్నా = ఇష్టాంకముచే గుణింపబడినదై (చేయబడినది) తత్కర్ణయోః = ఇష్టగుణకోటి యొక్కయు, కర్ణముయొక్కయు అంతరం = అంతరము, అస్త్రే = ఈకర్ణముగల క్షేత్రమునందు, బాహుః = భుజ.

అథవా = లేక, సైకేన = ఒకటితో గూడిన ఇష్టవర్గేణ = ఇష్టాంకవర్గముచే, ద్విఘ్నః = రెండుచే గుణింపబడిన, కర్ణః = కర్ణము, హృతః = భాగింపబడినదై, చేయబడినది, ఫలోనః = (ఆ)లబ్ధముచేత విడిచేయబడిన, శ్రవణః = కర్ణము, కోటిః = కోటి, ఇష్టగుణం = ఇష్టాంకముచే గుణింపబడిన, లబ్ధము, భుజః = భుజ.

151. సూ॥ కర్ణము తెలిసినచో ఇష్టసంఖ్యచే భుజకోటులం జెప్పుట.

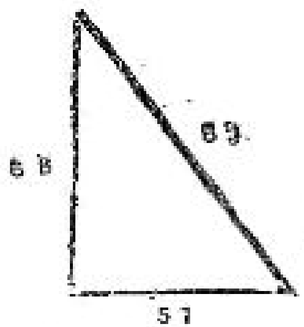
(1) కర్ణమును ఇష్టాంకముచే గుణించి రెంటిచే గుణింపుము. దీనిని ఇష్టాంకవర్గమునకు ఒకటినికలిపి ఆసంఖ్యచే భాగింపుము, లబ్ధము కోటి. కోటిని ఇష్టాంకముచే గుణింపగ వచ్చిన సంఖ్యయొక్కయు కర్ణముయొక్కయు అంతరము భుజ.

(2) కర్ణమును రెట్టించి దానిని ఇష్టాంకవర్గమునకు ఒకటి చేర్చగా వచ్చు సంఖ్యచే భాగింపుము. ఆలబ్ధమును కర్ణమువలన వ్యవకలింప శేషము కోటి, ఆలబ్ధమును ఇష్టాంకముచే గుణింప భుజయగును.

ఉదాహరణము

పంచాశీతిమితే కర్ణే యాన్ యాన్ బాహుకోటికౌ।
స్ఫుటాం కోటిభుజౌ తౌ తౌ వద కోవిద సత్వరం॥ ౧౫౨॥

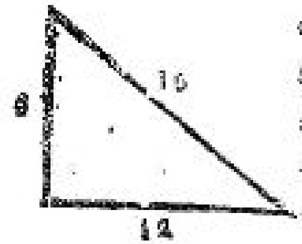
ప్ర॥ కర్ణము 85 యున్నచో కరణీగతములుగాని కోటిభుజములు ఎన్ని యేర్పడును? ఆయాకోటిభుజములను శీఘ్రముగా! త్వరగ చెప్పుము.



న్యాసః। కర్ణః ౮౫ అయం ద్విగుణః ౧౭౦ ద్వాభ్యామిష్టేన హతః ౩౪౦ ఇష్టం ౨ కృత్యా సైకయా ౫ భక్తే జాతా కోటిః ౬౮ ఇయం మిష్టగుణా ౧౩౬ కర్ణ ౮౫ వియోగే జాతో భుజః ౫౧ చతుష్కేణేష్టేన వా కోటిః ౪౦ భుజః ౭౫

ద్వితీయప్రకారేణాపి కర్ణః ౮౫ ద్విఘ్నే నేష్టేన జాతౌ కోటిభుజౌ ౫౧, ౬౮ చతుష్కేణ వా కోటిః ౪౦ భుజః ౭౫ అత్ర దోః కోట్యోస్త్వభ్యాం మభేదవశ కేవలం న స్వరూపభేదః

(1) కర్ణము 85 దీనిని రెట్టింప 170 ఇష్టాంకము 2చే గుణింప 340 ఇష్టాంక 2 వర్గము 4 నందొకటికలిపి 5చే భాగింప 68 కోటి. దీనిని ఇష్టము 2చే గుణింప 136 కర్ణము 85 ను వ్యవకలింప 51 భుజ, ఇష్టాంకము 4 అగుచో కోటి40 భుజ75



(2) ద్వితీయప్రకారము కర్ణము 85 ను రెట్టింప 170 ఇష్టము 2 యొక్క వర్గము 4 నందొకటికలిపి 5 దీనిచే భాగింప 34 లబ్ధము. ఈలబ్ధమును కర్ణము వలన వ్యవకలింప 85 — 34 = 51 కోటి. లబ్ధమును ఇష్టము2చే గుణింప 34 × 2 = 68 భుజ ఇష్టము 4 అగుచో అప్రకారము 85 కర్ణమునందు కోటి40 భుజ75 అగుచున్నవి.

కర్ణము15 గల క్షేత్రమునందు ఇష్టము 2 అగునప్పుడు పై (2)వ ప్రకారము ద్విగుణితకర్ణము 30ను ఇష్టవర్గము 4న నొకటిని చేర్చి 5చే భాగింప 6 లబ్ధము, దీనిని కర్ణము 15లో వ్యవకలింప 9 కోటి. లబ్ధము 6ను ఇష్టము 2చే గుణింప భుజ 12 అగుచున్నది.

(1) ఉపపత్తి: ఇ. కో — క = భుజ, కో = కోటి, క = కర్ణ ఇట్లుగల్పించిన

$$భుజవర్గ = ఇ^2.కో^2 - 2\ ఇ.కో.క + క^2$$

$$\therefore కో^2 = క^2 - భు^2 = - ఇ^2.కో^2 + 2\ ఇ.కో.క$$

$\therefore$ 2 ఇ. కో. క = కో^{2}(ఇ^2 + 1) యిరుపక్షములను కోచే భాగించిన

2 ఇ. క = కో(ఇ^2 + 1) $\therefore$ కో = $\frac{2.\ ఇ.\ క}{ఇ^2 + 1}$ ఇట్లుపపన్నము అగుచున్నది.

(2) ఉపపత్తి: క — కో = $\frac{క\ 2}{ఇ^2 + 1}$ = ఫ, ఇట్లుకల్పించిన క — ఫ

= కో అగును. కావున కో^{2} = క^2 − 2క.ఫ + ఫ^2 $\therefore$ క^2 − కో^{2} = 2క.ఫ − ఫ^2 = భు^{2}

$\because$ ఫ = $\frac{క\ 2}{ఇ^2 + 1}$ $\therefore$ 2 క.ఫ − ఫ^2 = $\frac{2క.2క}{ఇ^2 + 1}$ − $\frac{(2క)^2}{(ఇ^2 + 1)^2}$ = భు^{2}

= $\frac{4క^2}{ఇ^2 + 1}$ − $\frac{4క^2}{(ఇ^2 + 1)^2}$ = $\frac{4క^2.ఇ^2 + 4క^2 - 4క^2}{(ఇ^2 + 1)^2}$ = $\frac{4క^2.ఇ^2}{(ఇ^2 + 1)^2}$ = భు^{2}

= $\left\{\frac{2క.ఇ}{ఇ^2 + 1}\right\}^2$ = భు^{2} $\therefore$ భు = $\frac{2క.ఇ}{ఇ^2 + 1}$ = $\frac{2క}{ఇ^2 + 1}$ × ఇ ఇచట $\frac{2క}{ఇ^2 + 1}$ = ఫ,

కావున భు = ఫ × ఇ ఇట్లు ఉపపన్నమగుచున్నది.

అథేష్టాభ్యాం భుజకోటికర్ణానయనే కరణ సూత్రం వృత్తార్ధమ్.

ఇష్టయో రాహతి ర్ద్విఘ్నీ కోటి ర్వర్గాన్తరం భుజః।
కృతియోగ స్తయో రేవ కర్ణ శ్చాకరణీగతః॥ ౧౪౧

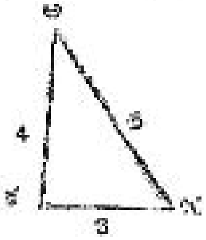
టీ॥ ఇష్టయోః = ఇష్టాంకములయొక్క, ఆహతిః = గుణనము, ద్విఘ్నీ = రెండుచేగుణింపబడినదై, కోటిః = కోటియగును, వర్గాన్తరం భుజః = (ఇష్టసంఖ్యలయొక్క) వర్గములయొక్క అంతరము భుజ, తయోరేవ = ఆ ఇష్టాంకములయొక్కనే, కృతియోగశ్చ = వర్గయోగముకూడ, అకరణీగతః కర్ణః = కరణీగతముకాని కర్ణము.

౧౬౫. వ్రి. తా॥ రెండు ఇష్టాంకములను కల్పింపుము. ఒకదానిచే ఒకదానిని గుణించి రెట్టించిన కోటియగును. ఆ రెండు ఇష్టాంకములయొక్కయు వర్గాంతరము భుజయగును, వర్గయోగము కర్ణమగును.

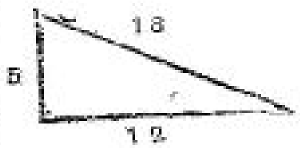
ఉదాహరణం

ఇష్టై ర్యై స్త్ర్యస్రం భవే జ్జాత్యం కోటిదోశ్శ్రుతిభి స్సఖే।
త్రీన్ వ్యవిదితా న్నేతాన్ క్షిప్రం బ్రూహి విచక్షణ॥ ౭౦॥

తా॥ మిత్రమా! విద్వాంసుడా! ఏయేయిష్టాంకములచే జాత్యక్షేత్రములకు అట్టి భుజకోటికర్ణములు కొన్ని చెప్పుము.



న్యాసః ఇష్టే ౨, ౧ అభ్యాం కోటి భుజకర్ణాః ౪, ౩, ౫ అథవా ఇష్టే ౨, ౩ అభ్యాం కోటి భుజకర్ణాః ౧౨, ౫, ౧౩ అథవా ఇష్టే ౨, ౪ అభ్యాం కోటిభుజకర్ణాః ౧౬, ౧౨, ౨౦ ఏవమనేకధా.



ఇచట 2, 1 ఇష్టాంకములు కల్పించినచో వానిగుణిత 2 × 1 × 2 = 4 కోటియగును. ఇష్టసంఖ్యావర్గాంతరము $2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ భుజ అట్లు వర్గయోగము 4 + 1 = 5 కర్ణము. ఇష్టసంఖ్యలు 2, 3 అయినచో ఇష్టములగుణనము 2 × 3 = 6, రెట్టించిన 6 × 2 = 12 కోటి ఇష్టములవర్గాంతరము 9 − 4 = 5 భుజ, వర్గయోగము 9 + 4 = 13 కర్ణము. ఇట్లు ఇతరములగు ఇష్టసంఖ్యలచే అనేకములగు కోటిభుజకర్ణములగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: యా. కా ఇష్టసంఖ్యలు, యా^{2} + కా^{2} = కర్ణ, యా^{2} − కా^{2} = భుజ. ఇట్లు కల్పింపగా కో^{2} = క^2 − భు^{2} = {(యా^{2} + కా^{2}) + (యా^{2} − కా^{2})} × {(యా^{2} + కా^{2}) − (యా^{2} − కా^{2})} (151 వ్రి. చూ)

$\therefore$ క^2 − భు^{2} = 2 యా^{2} × 2కా^{2} = 4 యా^{2}.కా^{2} = కో^{2}

$\therefore$ కో = 2 యా. కా అగుచున్నది.

ఇట్లు ఈపద్ధతి యుపపన్నమగుచున్నది.

కర్ణకోటియుతౌ భుజేచ ఘ్నాతే పృథక్కరణాయపూర్వత్రివృత్తం
వంశాగ్రమూలాంతరభూమివర్గో వంశోద్ధృతస్తేనపృథగ్యుతోనౌ।
వంశౌ తదర్ధే భవతః క్రమేణ వంశస్యఖండే శ్రుతికోటిరూపే॥ ౧౪౩

టీ॥ వంశాగ్రమూలాంతరభూమివర్గః = (వంశ = వెదురు) వంశాగ్రమునకును, వంశమూలమునకును మధ్యనున్న భూమియొక్క వర్గము, వంశోద్ధృతః =

లంబపరిమాణమునచే భాగింపబడినదై చేరునదిగనుక, లేద = లబ్ధముచే, లంబ = లంబమును, వృక్షాగ్ర—తీరము యొక్కకొన = కలుపబడినదిగనుక వేయబడినచో దానిచే, వర్గ = వాటియొక్క సగములు, క్రమేణ = క్రమముగచే, కోటి కర్ణవర్గాంతరము = కర్ణముకోటియును నైన వంశఖండములు

(దీనితాత్పర్యము ఉదాహరణ శ్లోకాంతరము చూడుము)

ఉదాహరణం

యదిసమభువి వేణుర్ద్విత్రిపాణిప్రమాణో గణక పవనవేగాదేకదేశే సభగ్నః। భువి నృపమితహస్తేష్వఙ్గలగ్నం తదగ్రం కథయ కతిషు మూలాదేష భగ్నః కరేషు॥ ౭౧

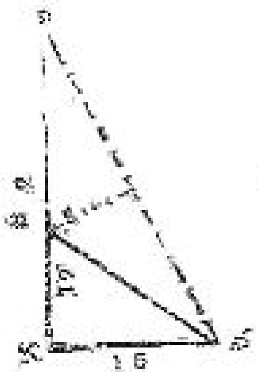
తా: గణకుడా! ఒకసమప్రదేశమందు 32 హస్తములు పరిమాణముగల వెదురు గాలియొక్కవేగముచే ఒకప్రదేశమునందు కొంచెము విరిగెను. ఆ వెదురుయొక్క కొన భూమియందు వెదురుయొక్క మొదటినుండి 16 హస్తములు దూరమునందు తగిలెను. మొదటినుండి ఎన్నిహస్తములందు ఆవెదురు విరిగినది? చెప్పుము.

ఇచట వంశాగ్రమునకును వంశమూలమునకును అంతరము 16 హస్తములు భుజ. భూమినుండి వంశముకొనవరకుగల ప్రదేశము కోటి. విరిగినప్రదేశమునుండి నేలతాకినకొనవరకుగల వంశఖండము కర్ణము. కాబట్టి వంశపరిమాణము కర్ణకోటియోగమగును. దీనివలన సూత్రము కల్పింపబడెను.

156. సూ. ఇట్లు కోటికర్ణయోగమున్ను భుజయున్ను తెలిసినచో భుజవర్గమును కర్ణకోటియోగముచే భాగింపుము. లబ్ధమును కర్ణకోటియోగమును (సంక్రమణం) చేయవలెను. ఒకచో కలుపుము, ఒకచో వ్యవకలింపుము. రెంటిని అర్ధించుము. యోగముయొక్క సగము కర్ణమగును. అంతరముయొక్క సగము కోటియగును. ఇవియే వెదురుయొక్క ఖండములు (అనగా కోటియెంతదూరము భూమినుండి అంత దూరమునందు విరిగెనని చెప్పవలసియున్నది)

న్యాసః. కర్ణకోటియుతిః ౩౨ భుజః ౧౬. లబ్ధే వేణోర్భఙ్గఖండే ౨౦, ౧౨

ఇచట వగ = వంశము, కవరిప్రదేశమున వంశము (వెదురు) విరిగినది. కాబట్టి కగ = వంశాధఃఖండము = కోటి వక = కవ = కర్ణము వంశోర్ధ్వఖండము



కఘ = భుజ = వంశాగ్రమూలాంతర భూమి వగ = వంశాగ్రము భూమి వరకు గల పరిమాణము కాబట్టి సూత్రోక్త రీతిచే

$$\frac{\text{కఘ}^2}{\text{వగ}} = \frac{16^2}{32} = \frac{256}{32} = 8 \text{ ఫలము.}$$

$$\frac{\text{వగ} + \text{ఫ}}{2} = \frac{32+8}{2} = 20 \text{ కర్ణము}$$

$$\frac{\text{వగ} - \text{ఫ}}{2} = \frac{32-8}{2} = 12 \text{ కోటి}$$

ఉపపత్తి:—(1) కోటికర్ణయోగమున్ను కోటికర్ణవర్గాంతరమున్ను తెలియునచో కోటికర్ణపరిమాణములు (104 సూ 1 అనుచే) సంక్రమణగణితముచే తెలియుచున్నవి. ఇచట అవర్గమే చెప్పబడెను

(2) రేఖాగణితరీత్యా కఘ = భుజ వగ = పెద్దకోటి వఘ = పెద్ద కర్ణము కచ = 'వఘ' కర్ణమందలి మధ్యబిందువునుండి వేసినలంబము

కవ = కఘ కాబట్టి కవచ, కఘచ త్రిభుజములు సమానములైయున్నవి

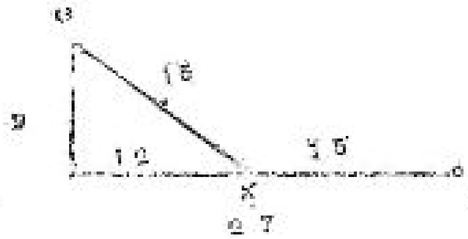
(రేఖాగణితము 6 అ 8 ప్రతిజ్ఞచే త్రిభుజసాదృశ్యముచే)

$$\text{కవ} = \frac{\text{వచ} \times \text{వఘ}}{\text{వగ}} = \frac{\text{వచ}}{\text{వగ}} \times \text{వఘ} = \frac{\text{వఘ}}{\text{వగ}} \times \frac{\text{వఘ}}{2} \therefore \text{వచ} = \frac{\text{వఘ}}{2}$$

$$\therefore \text{కవ} = \frac{\text{వఘ}^2}{2\text{వగ}} \text{ ఇచట } \text{వఘ}^2 = \text{వగ}^2 + \text{గఘ}^2 \therefore \text{కవ} = \frac{\text{వగ}^2 + \text{గఘ}^2}{2\text{వగ}}$$

$$= \frac{\text{వగ}^2}{2\text{వగ}} + \frac{\text{గఘ}^2}{2\text{వగ}} = \frac{\text{వగ}}{2} + \frac{\text{గఘ}^2}{2\text{వగ}} = \frac{\text{వగ} + \frac{\text{గఘ}^2}{\text{వగ}}}{2} = \frac{\text{వం} + \frac{\text{భు}^2}{\text{వం}}}{2}$$

ఇటు కవ—కగ—వంశోర్ధ్వఖండము కాబట్టి కోటికర్ణయుతిలోని కర్ణమగుచున్నది.



ఉపపత్తి: అగ² — కగ² = అక² (150 ప్ర)

కప = అగ + కగ ∴ $\frac{\text{అగ}^2 - \text{కగ}^2}{\text{అగ} + \text{కగ}} = \frac{\text{అక}^2}{\text{కప}}$ = అగ — కగ (104 ప్ర 1 అను)

రాశియోగాంతరములచే రాశిజ్ఞానము (103 ప్ర, చే) గలుగుచున్నది. పైపద్ధతికిని ఈపద్ధతికిని భుజకోటులకు నామభేదమే గాని యూహభేదములేకుంటచే భేదము లేదు. కావున ఉపపత్తియందును భేదములేదు.

కోటికర్ణాంతరే భుజే దృష్టే పృథక్కోటిశ్రుతీ గణక సూత్రేణ ప్రవక్తుం

భుజాద్వర్గితాత్కోటికర్ణాంతరాప్తం ద్విధా కోటికర్ణాంతరేణోనయుక్తం।
తదర్ధే క్రమాత్కోటికర్ణౌ భవేతామిదం ధీమతావేద్య సర్వత్ర యోజ్యం॥

టీ॥ వర్గితాత్ = వర్గింపబడిన, భుజాత్ = భుజమునకు, కోటికర్ణాంతరాప్తం = కోటికర్ణాంతరముచే భాగింపగావచ్చినలబ్ధము ద్విధా = రెండుచోట్ల నుంచ బడినదై కోటికర్ణాంతరేణోనయుక్తం = కోటికర్ణాంతరముచే తీసి వేయబడినదియు కలుపబడినదియు చేయవలెను. తదర్ధే = ఆఅంతరముయొక్కయు యోగము యొక్కయు అర్ధములు క్రమాత్ = క్రమముగ కోటికర్ణౌ భవేతాం = కోటికర్ణములగును ధీమతా ఇదం అవేద్య సర్వత్ర యోజ్యం = బుద్ధిమంతునిచే నిది తెలిసి కొని అంతటను చేయవలెను.

158. ప్ర. కోటికర్ణముల యంతరమున్ను భుజమున్ను తెలిసినచో భుజ వర్గమును కోటికర్ణాంతరముచే భాగించగవలబ్ధమును కోటికర్ణాంతరముచే తీసి కలిపి యుంచవలెను. ఒకచో నుంచబడిన దానియొక్కయు అర్ధములు క్రమముగ కర్ణము కోటి యును కాగలవు.

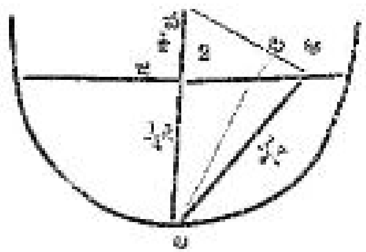
సఖేపద్మతన్మజ్జనస్థానమధ్యంభుజః కోటికర్ణాంతరంపద్మదృశ్యం।
నలఃకోటిరేతన్మితంస్యాద్యదంభో వదైవంసమానీయపానీయమానం॥

టీ॥ (వూ. ఉదా॥) మిత్రుడా! పద్మముయొక్కయు ఆపద్మము మునిగిన స్థానముయొక్కయు మధ్యభాగము భుజ, పద్మముయొక్క కనుపించుభాగము కోటి కర్ణాంతరము, పద్మనాళము (నీటిలోనున్న భాగము) కోటి, జలముకోటియంతయేయా అంతయనుకొనిన పైసూత్రప్రకారము కోటినితెలుసుకొని దానిచే జలమానమును చెప్పుము.

ఉదాహరణం

చక్రక్రౌంచాకులితసలిలే క్వాపి దృష్టం తటాకే తోయాదూర్ధ్వం కమల కలికాగ్రం వితస్తిప్రమాణం। మందం మందం చలిత మనిలేనాహతం హస్తయుగ్మే తస్మిన్మగ్నం గణక కథయ క్షిప్రమంభః ప్రమాణం॥

టీ॥ గణకుడా! చక్రవాకములచేతను క్రౌంచములచేతను వ్యాకులమైన జల ముగల ఒకానొక సరస్సునందు జలముకంటె పైభాగమున తామరమొగ్గయొక్క కొన 12 అంగుళములు ప్రమాణమై కన్పట్టెను. వాయువుచే కొట్టబడినదై మెల్ల మెల్లగ చలించుచు నాపద్మము తొలుత కన్పట్టినచోటినుండి 2 హస్తముల (48 అంగుళముల) దూరమున జలములో మునిగెను. (ఆ మొగ్గయొక్క కొన నీటి పైభాగముతో సరిసమునట్లు కర్ణరూపమున నాళముతోగూడ నాపద్మము వంగినది) శీఘ్రముగ జలప్రమాణము (లోతు)ను చెప్పుము.



న్యాసః. కోటి కర్ణాంతరం $\frac{1}{2}$

భుజః ౨ లబ్ధం జలగాంభీర్యం $\frac{15}{4}$

ఇయంకోటిః. ఇయమేవకోటిః

కలికామానయుతాజాతఃకర్ణః $\frac{17}{4}$

కోటికర్ణాంతరము $\frac{1}{2}$ హస్తము. భుజ 2 హస్తములు భుజవర్గము 4ను కోటి కర్ణాంతరము $\frac{1}{2}$ చే భాగింప లబ్ధము 8ను కోటికర్ణాంతరమునుచే తీసి కలిపి

యర్ధించిన కోటి.కలిపి యర్ధించిన కర్ణము-పద్మము యొక్క మొత్తము ప్రమాణము.

ఉపపత్తి: క్షేత్రసాజాత్యమువలన అనుపాతముచే

పై క్షేత్రమునందు అచల అనుత్రిభుజమునందు అచల జాత్యము అచబజాత్య మున్నుగలవు. ఇవి తొలుతపశ్నమునందే చూపబడినవి. అట్లు అచరేఖయందు లంబమున్నది. అంబమును చేయుటవలన రెండుజాత్యములు అగుచున్నవి. అందు అల, బల రేఖలు సమములగుటచే అచలత్రిభుజము సమద్విబాహుకము కావున

ఉపపత్తి: $అగ^2 - కగ^2 = అక^2$ (150 ప్ర)

కచ = అగ + కగ ∴ $\frac{అగ^2 - కగ^2}{అగ + కగ} = \frac{అక^2}{కచ}$ = అగ − కగ (104 ప్ర 1 అను)

రాశియోగాంతరములచే రాశిజ్ఞానము (103 ప్ర, చే) గలుగుచున్నది. పైపద్ధతికిని ఈపద్ధతికిని భుజకోటులకు నామభేదమే గాని యొకభేదములేకుండుటచే భేదము లేదు. కావున ఉపపత్తియందును భేదములేదు.

కోటికర్ణాంతరే భుజే దృష్టే పృథక్కరణసూత్రం వృత్తం
భుజాద్వర్గితాత్కోటికర్ణాంతరాప్తం ద్విధా కోటికర్ణాంతరేణోనయుక్తం।
తదర్ధే క్రమాత్కోటికర్ణౌ భవేతామిదం ధీమతావేద్యసర్వత్ర యోజ్యం॥

టీ॥ వర్గితాత్ = వర్గింపబడిన, భుజాత్ = భుజమునుండి కోటికర్ణాంతరాప్తం = కోటికర్ణాంతరముచే భాగింపగావచ్చినలబ్ధము ద్విధా = రెండుచోట్ల నుంచవలెనని కోటికర్ణాంతరేణోనయుక్తం = కోటికర్ణాంతరముచే తీసి వేయబడినదియు కలుపబడినదియు చేయవలెను. తదర్ధే = అట్టిరాశులయొక్క యోగము యొక్క యర్ధములు క్రమాత్ = క్రమముగ కోటికర్ణౌ భవేతాం = కోటికర్ణములగును. ధీమతా ఇదం ఆవేద్యం సర్వత్ర యోజ్యం = బుద్ధిమంతునిచే నిది తెలిసికొని అంతటను చేయదగినది.

158. ప్ర. కోటికర్ణముల అంతరమున్ను భుజయున్ను తెలిసినచో భుజవర్గము కోటికర్ణాంతరముచే భాగింపగవచ్చిన లబ్ధమును కోటికర్ణాంతరముతో కలిపి తీసివేసి సగముచేయగా క్రమముగ కర్ణము కోటియు కాగలవు.

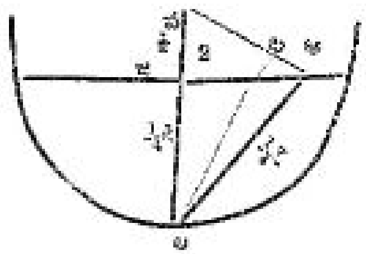
సఖే పద్మతన్మజ్జనస్థానమధ్యం భుజః కోటికర్ణాంతరం పద్మదృశ్యం।
నలః కోటిరేతన్మితం స్యాద్యదంభో వదైవం సమానీయ పానీయమానం॥

తా॥ (మూ. ఉదా॥) మిత్రమా! పద్మము యొక్కయు ఆపద్మము మునిగిన స్థానముయొక్కయు మధ్యభాగము భుజ, పద్మము యొక్క కనుపించుభాగము కోటికర్ణాంతరము, పద్మనాళము (నీటిలోనున్నభాగము) కోటి. జలము కోటియంతయై యుండునని పైసూత్రప్రకారము కోటిని తెలిసికొని దానిచే జలమానమును చెప్పుము.

ఉదాహరణం

చక్రక్రౌంచాకులితసలిలే క్వాపి దృష్టం తడాగే తోయాదూర్ధ్వం కమల
కలికాగ్రం వితస్తిప్రమాణం। మందం మందం చలితమనిలేనాహతం
హస్తయుగ్మే తస్మిన్మగ్నం గణక కథయ క్షిప్రమంభఃప్రమాణం॥

తా॥ గణకుడా! చక్రవాకములచేతను క్రౌంచములచేతను వ్యాకులమైన జలముగల ఒకానొక సరస్సునందు జలముకంటె పైభాగమున తామరమొగ్గయొక్క కొన 12 అంగుళములు ప్రమాణమై కన్పట్టెను. గాలిచే కొట్టబడినదై మెల్ల మెల్లగ చలించుచు తామరపువ్వు తొలుత కన్పట్టినప్రదేశమునకు 2 హస్తముల (48 అంగుళముల) దూరమున ఆతటాకములో మునిగెను, (ఆమొగ్గయొక్క కొన నీటి పైభాగముతో సరిపడునట్లు కర్ణరూపముగ నాళముతోగూడ తామరపువ్వు వంగినది) శీఘ్రముగ జలప్రమాణము (లోతు)ను చెప్పుము.



న్యాసః. కోటి కర్ణాంతరం $\frac{1}{2}$

భుజః 2 లబ్ధం జలగాంభీర్యం $\frac{15}{4}$

ఇయం కోటిః. ఇయమేవ కోటిః

కలికామానయుతా జాతః కర్ణః $\frac{17}{4}$

కోటికర్ణాంతరము $\frac{1}{2}$ హస్తము. భుజ 2 హస్తములు భుజవర్గము 4ను కోటికర్ణాంతరము $\frac{1}{2}$ చే భాగింప 8 లబ్ధము. ఇందు కోటికర్ణాంతరమును వ్యవకలించి యర్ధించ $\frac{15}{4}$ కోటి. కలిపి యర్ధించ $\frac{17}{4}$ కర్ణము. పద్మము యొక్క యొక్కము ప్రమాణము.

ఉపపత్తి: క్షేత్రజాత్యమువలన అనుపాతముచే

పైక్షేత్రమునందు అవల అనురిత్రభుజములందు ఆ జాత్యము ఆవలజాత్యమున్నుగలవు. ఇవి తొలుతప్రశ్నమునందే చూపబడినవి. అట్లు అవరోహణమందు ఉపయుక్తమగు అంచమును చేయుటవలన రెండు జాత్యములు అగుచున్నవి. అందు అల, లల రేఖలు సమములగుటచే అవలత్రిభుజము సమద్విబాహుకము కావున

[illegible] (రేఖాగణిత 1 అ. 5 ప్ర. 20 ప్ర. పూ.) [illegible] (రేఖా 6 అ. 8 ప్ర. పూ.) [illegible]

[illegible]

[illegible] ∴ [illegible]

[illegible] ∴ [illegible]

∴ [illegible]

[illegible]

(2) [illegible] (103, 104 ప్ర. పూ.)

(3) [illegible]

∴ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

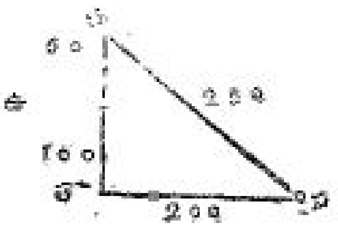
[illegible]

159. సూ. [illegible] (ఉదా. పూ.)

ఉదాహరణం

వృక్షాద్ధస్తశతోచ్ఛ్రయాచ్ఛతయుగే వాపీంకపిః కోప్యగా
దుత్తీర్యాథ పరో ద్రుతం శ్రుతిపథేనోడ్డీయ కించిద్ద్రుమాత్ ।
జాతైవం సమతా తయోర్యదిగతా వుడ్డీనమానం కియ
ద్విద్వంశ్చేత్సుపరిశ్రమోస్తి గణితే క్షిప్రం తదాచక్ష్వ మే ॥ [illegible]

తా॥ ఒక తాటిచెట్టు 100 హస్తములు ఎత్తుగా [illegible] 200 హస్తము [illegible]



ఇచట ఆఉ = తాళవృక్షమానము 100 హస్తములు. ఆవ = తాళవృక్షాంతరము 200 హస్తములు. ఉవ = ఉడ్డీనము, ఆవ = కోటి, ఆవ = భుజ, ఉవ = కర్ణము.

ఆఉ + ఆవ = ఉవ + వవ = వానరగమనగతి. ఇట్లు కోటికర్ణయోగము భుజమున్ను ఇవ్వబడెను, కోటికర్ణయోగము చెప్పబడెను. కోటికర్ణప్రమాణములు చెప్పవలయును.

న్యాసః వృక్షవాప్యంతరం ౨౦౦ వృక్షోచ్ఛ్రాయః ౧౦౦ లబ్ధ ముడ్డీనమానమ్ ౫౦ కోటిః ౧౫౦ కర్ణః ౨౫౦ భుజః ౨౦౦

ఈ సూత్రప్రకారము $\dfrac{\text{ఆఉ} \times \text{ఆవ}}{2\,\text{ఆఉ} + \text{ఆవ}} = \dfrac{100 \times 200}{2 \times 100 + 200} = \dfrac{20000}{400} = 50$ ఉవ

$\therefore$ ఆఉ + ఉవ = 100 + 50 = 150 కోటి. ఉవవ — ఉవ = 300 — 50 = 250 కర్ణము

ఉపపత్తి: భుజప్రశ్నోక్త సమీకరణముచే చెప్పబడుచున్నది.

ఉవ + ఆఉ = కో $\therefore$ (ఉవ + ఆఉ)^2 + ఆవ^2 = వవ^2

$\therefore$ ఉవ^2 + 2ఉవ.ఆఉ + ఆఉ^2 + ఆవ^2 = వవ^2

ఇచట వవ = (ఆఉ + ఆవ) — ఉవ = ఆఉ + ఆవ — ఉవ

$\therefore$ ఉవ^2 + 2ఉవ.ఆఉ + ఆఉ^2 + ఆవ

= ఆఉ^2 + ఆవ^2 + ఉవ^2 + 2ఆవ.ఆఉ — 2ఉవ.ఆఉ — 2ఉవ.ఆవ

పక్షద్వయమునందును సమశోధనము చేయగా

2 ఉవ.ఆఉ = 2ఆవ.ఆఉ — 2 ఉవ.ఆఉ — 2ఉవ.ఆవ

$\therefore$ 4 ఉవ.ఆఉ + 2ఉవ.ఆవ = 2ఆవ.ఆఉ రెండుచే భాగించిన

2 ఉవ.ఆఉ + ఉవ.ఆవ = ఆవ.ఆఉ.

= ఉవ (2ఆఉ + ఆవ) = ఆవ.ఆఉ $\therefore \dfrac{\text{ఆవ.ఆఉ}}{2\,\text{ఆఉ} + \text{ఆవ}}$ = ఉవ

ఇట్లీపద్ధతి యుక్తమన్న దగుచున్నది. ప్రశ్నోత్తరభేదములను విస్తరభీతిచే వ్రాయలేదు.

భుజకోట్యోర్యోగే కర్ణే చ జ్ఞాతే పృథక్కరణసూత్రం వృత్తం
కర్ణస్య వర్గాద్ద్విగుణాద్విశోధ్యో దోఃకోటియోగస్య కృతిస్తదీయం మూలం।
యోగో ద్విధా మూలవిహీనయుక్తః స్యాతాం తదర్ధే భుజకోటిమానే॥

కర్ణస్య వర్గాత్ ద్విగుణాత్ = రెట్టింపబడిన కర్ణవర్గమువలన, దోఃకోటియోగస్య కృతిః = తీసివేయబడిన (అనగా వర్గింపబడిన) భుజకోటియోగము విశోధ్యః = వ్యవకలింపదగినది. తదీయమూలం (శేషము) = ఆశేషముయొక్క మూలము చేయదగినది. యోగః = భుజకోటియోగము ద్విధా = రెండుచోట్ల (వ్రాయబడినది) మూలవిహీనయుక్తః (సన్) = మూలముచే ఒకచో వ్యవకలింపబడినదియు మరియొకచో కలుపబడినదియు చేయదగినది. తదర్ధే భుజకోటిమానే స్యాతాం = వానియొక్క సగములు భుజకోటిప్రమాణములగును.

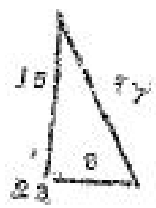
160. ప్ర. కర్ణవర్గమును రెట్టించి దానివలన భుజకోటియోగముయొక్క వర్గమును తీసివేయుము. ఆశేషముయొక్క మూలమును భుజకోటియోగమునందు కలిపి అర్ధించిన కోటియగును. వ్యవకలించి అర్ధించిన భుజయగును.

ఉదాహరణమ్

దశ సప్తాధికః కర్ణస్త్ర్యధికా వింశతిః సఖే।
భుజకోటియుతిర్యత్ర తత్ర తే మే పృథగ్వద॥ ౭౫॥

తా॥ ఒకచోట్లయందు కర్ణము 17 భుజకోటియోగము 23 మిత్రుడా! ఆక్షేత్రమునందు వాని భుజకోటులను వేరుగ చెప్పుము.

న్యాసః. కర్ణః ౧౭ దోఃకోటియోగః ౨౩ జాతే భుజకోటీ ౮, ౧౫



కర్ణము17 దీనివర్గము 289 రెట్టింప 578 దీనివలన భుజకోటియోగము 23 యొక్క వర్గమును వ్యవకలింప 49 దీనిమూలము 7 ను భుజకోటియోగమునకలుప 23 + 7 = 30 వ్యవకలింప 23 — 7 = 16 అర్ధింప 15, 8 కోటి భుజములగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: భు^{2} + కో^{2} = క^2, భు + కో = యోగ

రెండురాసులవర్గయోగమును అరాసులయోగమును తెలిసినవి. అప్పుడు (105 ప్ర. చే)(భు^{2} + కో^{2})2 — (భు + కో)^2 = (కో — భు)^2

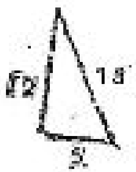
దీనివర్గమూలము (కో — భు) ను (భు² + కో²) 2 — (కో — భు)² = (భు + కో)² దీనిమూలము (కో + భు) రాశియోగముచే రాశ్యంతరమును రాశ్యంతరముచే రాశియోగమును తెలియుచున్నవి. పిమ్మట రాశియోగ రాశ్యంతరములవలన (108 ప్ర. చూ) రాసులు తెలియును.

ఉదాహరణమ్

దోఃకోట్యో రంతరం శైలాః కర్ణో యత్ర త్రయోదశ।
భుజకోటీ పృథక్ తత్ర వదాశు గణకోత్తమ॥ [illegible]॥

కాగ ఒకజాత్యత్రిభుజమునందు కోటిభుజాంతరము 7, కర్ణము 13 అట్టి గణకోత్తమా! భుజకోటులను శీఘ్రముగ వేరుగ చెప్పుము.

న్యాసః. కర్ణః ౧౩ భుజకోట్యంతరం ౭ లబ్ధే భుజకోటీ ౫, ౧౨



7

కర్ణము 13 యొక్క వర్గము 169 దీని రెట్టింపు 338 దీనివలన భుజకోట్యంతర 7 వర్గము 49 ను తీసివేయగ 289 శేషము. దీనిమూలము 17 ఇదియు భుజకోట్యంతరమును కలిపి యర్ధించిన $\frac{17+7}{2} = 12$ కోటి, తీసివేసిన దాని యర్ధించిన $\frac{17-7}{2} = 5$ భుజ. యని వచ్చుచున్నవి.

లంబావబాధాజ్ఞానాయ కరణసూత్రం వృత్తం.

అన్యోన్యమూలాగ్రగసూత్రయోగా ద్వేణ్వోర్వధే యోగహృతే వలంబః। వంశౌ స్వయోగేన హృతా వభీష్టభూఘ్నౌ చ లంబోభయతః కుఖండే॥ ౧౫౮॥

టీ॥ వేణ్వోర్వధే = వేణువులయొక్క వధమునందు, యోగహృతే = వేణువులయోగముచే భాగింపబడినదగుచుండ, అన్యోన్యమూలాగ్రగసూత్రయోగాత్ = ఒకరెండవదానియొక్క మూలాగ్రములనంటిన సూత్రములయోగము (కలిసినచోటు) నుండి అవలంబః = లంబము. వంశౌ = వేణువులు, అభీష్టభూఘ్నౌ = ఇష్టమగు భూమానముచే గుణింపబడినవైనను, స్వయోగేన హృతౌ

-ను వేణువులయోగముచే భాగింపబడినవైనను, లంబోభయతః = లంబమునకు రెండు ప్రక్కలయందు భూఖండములు (అనగా ఆబాధలు) అగును.

161. వ్యా. (1) ఒకభూమిపైగల రెండువంశాగ్రములు ఆధారములయొక్కయు కోటులు పరస్పరాభిముఖములుగ నున్నప్పుడు ఆకాశమునందలి కర్ణములయోగమునుండి భూమియందు చేర్చబడిన లంబమానము లంబమానమును నిరుపక్షములందు భూఖండములనున్న తెలియుటకు పద్ధతి.

(2) వేరువేరు ప్రమాణములుగల రెండు స్తంభములందు వేయబడిన వేణువుల కోటులు ఆధారములయొక్కయు మధ్యనున్న భూమి భుజ. ఒకదాని మూలమునుండి మరియొకదాని యగ్రమునకు కట్టబడిన సూత్రములు కర్ణములు.

(3) అవధారణలు కలిపిన వేణువుల యోగముచే భాగింప బడినచో కర్ణసూత్రములయోగమునుండి భూమిపై పడిన లంబము అవధానములగును.

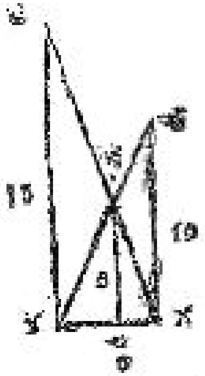
(4) ఆ వేణువుల ప్రమాణములను అభీష్టభూప్రమాణముచే వేర్వేరుగ గుణించి ఆవేణుప్రమాణములయోగముచే భాగింప లంబమునకు నిరుపక్షములందు ఆబాధ లగును.

ఉదాహరణమ్

పంచదశదశకరోచ్ఛ్రయవేణ్వో రజ్ఞాతమధ్యభూమికయోః।
ఇతరేతరమూలాగ్రగసూత్రయుతే ర్లంబమానమాచక్ష్వ॥ ౧౫౯॥

కాగ ఒకవేణువు 15 హస్తములు, మరియొకవేణువు 10 హస్తములు. వీని నడిమియొక్కయు మధ్యభూమియొక్క ప్రమాణము తెలియదు. ఆవేణువులు రెండిటిని ఒకదాని మూలమునుండి మరియొకదాని అగ్రమునకు కట్టబడిన కర్ణరూపములైన సూత్రముల యోగమునుండి లంబప్రమాణమును చెప్పుము.

న్యాసః వంశౌ ౧౫, ౧౦ జాతో లంబః ౬. వంశాంతరభూః ౫ అతో జాతే భూఖండే ౩, ౨ అథవా భూః ౧౦ ఖండే ౬, ౪ వా భూః ౨౦ ఖండే ౧౨, ౮, ఏవం సర్వత్ర లంబః ౬ ఏవ. యద్యత్ర భూమిస్తుల్యైవ వంశకోటి ప్రమాణభూఖండేన కిమితి త్రైరాశికేన సర్వత్ర ప్రతీతిః.



ఈ క్షేత్రమునందు అక ఒక వేణువు. చగ ఒక వేణువు. రెండు వేణువులకును కగ భూమి. అక, చగ రేఖలు వేణువులు. అగ, చక రేఖలు అన్యోన్యమూలాగ్రగసూత్రములు. ఛ ఆ సూత్రముల యోగము. ఛల సూత్రయోగమునుండి లంబము. ఉక్తరీతిప్రకారము రెండు వేణువులయొక్క యోగము అక + చగ = 15 + 10 = 25 వేణువులయొక్క గుణనము అక × చగ = 15 × 10 = 150

ఇట్లు వేణుగుణనముచే వేణుయోగమును భాగించిన సూత్రయోగమునుండి లంబమగును.

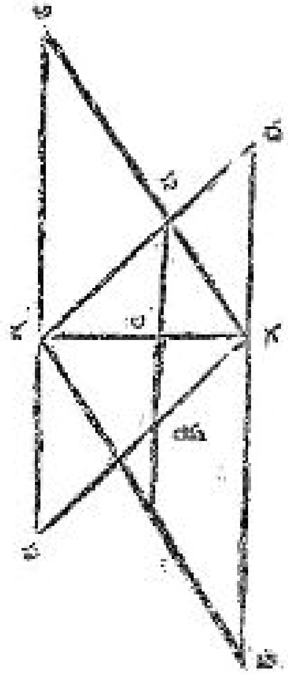
$$\frac{అక \times చగ}{అక + చగ} = ఛల = \frac{15 \times 10}{15 + 10} = \frac{150}{25} = 6 \text{ లంబము}$$

రెండు వేణువులయొక్క మధ్యమున్న భూమి యెంతయున్నను లంబమిదియే యగును. భూమి 5 అనుకొనుడో సూత్రప్రకారము పెద్ద వేణువును భూమానమునచే గుణించి వేణుయోగముచే భాగించిన $\frac{అక \times భూ}{అక + చగ} = \frac{15 \times 5}{15 + 10} = \frac{75}{25} = 3$

అక వేణువుకు దగ్గరనున్న భూఖండము కల ఆబాధ, ఇట్లు $\frac{చగ \times భూ}{అక + చగ} = \frac{50}{25} = 2$ ఇతర ఆబాధ.

ఇట్లు భూమి 10 అనుకొనిన ఆబాధలు 6, 4 భూమి 15 అనుకొనిన 9, 6 ఆబాధలు, భూమి 20 అనుకొనిన 12, 8 ఆబాధలు అగుచున్నవి. భూగణితము పరిశ్రమలేనివారికి, త్రైరాశికముచే తెలియుచున్నది. ఎట్లనగా: భూమిభుజములను నప్పుడు వేణుస్థానీయమునకు, ఆబాధభుజమునకు నెంతలో తెలియును? ఈ త్రైరాశికముచే లంబము తెలియును. అట్లు వేణుస్థానీయ భూమిభుజమునకు లంబస్థానీయ భుజమెంత? ఈ త్రైరాశికములచే ఆబాధలు తెలియుచున్నవి. జాత్యంతర్గతజాత్యములచేత సాజాత్యమువలన త్రైరాశికమువలన చేయగా సిద్ధాంతరీతిచే సాధింపబడిన లంబాబాధలు సరిపడుచున్నవి. కాని సూత్రపద్ధతి

యుక్తిగనుక్కొనియెడి తెలుసుకొనవలయును అని ఆచార్యులవారే వ్రాసియున్నారు.



ఉపపత్తి: ఇందు అక పెద్ద వేణువు చగ చిన్న వేణువు. ఛల లంబము. అక రేఖ పెరిగినప్పుడు కచ రేఖ చగ రేఖతో సమానముగనుట్టు వృద్ధి చేయబడినది. అట్లు చగ రేఖయు గట రేఖ అక రేఖతో సమముగనట్లు ఈ బిందువువరకును వృద్ధి చేయబడినది. పిమ్మట కట, గచ, కర్ణరేఖలు చేయబడినవి. ఛల లంబరేఖయు పెంచబడినది. ఈ ఛల రేఖ గచ రేఖతో ఙ్ద స్థానమున కలిసినది, కావున నిందు,

చగ = కచ, అక = గట ∴ అక + చగ = అచ = టగ ఇట్లు సమ రేఖ చగ, కచ, రేఖలకు సమానాంతరరేఖ యగుచున్నది. మరియు కచ = గచ కావున చకటగ సమానాంతర చతుర్భుజ క్షేత్రమగుచున్నది.

∴ చగ = కచ = ఛయ = చిన్న వేణువు.

మరియు అచగ త్రిభుజమునందు ఛయగ త్రిభుజము అంతర్గతమై సజాతీయ మగుచున్నది కావున అనుపాతము,

(1) అచగ త్రిభుజమునందు అచ భూమియందు అక ఆధారమనగా ఛయగ త్రిభుజమునందు ఛయ భూమియందు నెంతతబాధ యుండును? ఛల యగుచున్నది.

$$\therefore \frac{అక \times ఛయ}{అచ} = \frac{అక \times చగ}{అక + చగ} = ఛల$$

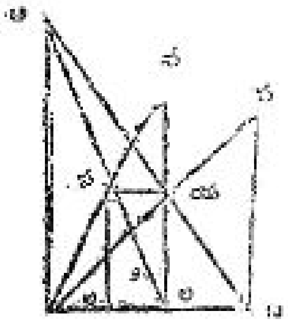
(2) ఇట్లు అచగ త్రిభుజమునందు అచ ఆధారమునందు కగ లంబమనగా ఛయగ త్రిభుజమునందు ఛయ ఆధారమునందు లంబమెంతయగునని కలుగుచున్నది.

$$\therefore \frac{కగ \times ఛయ}{అచ} = \frac{భూ \times చగ}{అక + చగ} = గల = \text{చిన్న యాబాధయగును.}$$

[illegible]

$\frac{[illegible]}{[illegible]} [illegible] = \frac{[illegible] \times [illegible]}{[illegible] + [illegible]}$ [illegible]

[illegible]



[illegible]

అక్షేత్రలక్షణసూత్రం

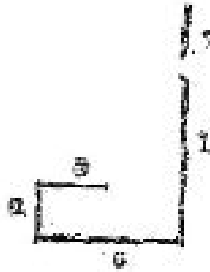
[illegible]

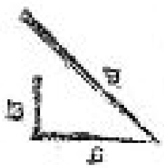
[illegible]

ఉదాహరణమ్

[illegible]

162. ప్ర. [illegible] చతుర్భుజక్షేత్రమునందు 3, 6, 2, 12 భుజములనియు త్రిభుజక్షేత్రమున 3, 6, 9 భుజములనియు [illegible]





[illegible]

3 + 3 + 6 = 11 [illegible]

[illegible]

కంటె [illegible] భుజములయోగము [illegible] అధికమగును. దానింబట్టి [illegible] క్షేత్రమునందు 3 భుజములయొక్క యోగము [illegible] కంటె [illegible] గాగలదు. ఇట్లు [illegible] భుజాదిక్షేత్రములందును తెలియవలెను.

అబాధాదిజ్ఞానాయ కరణసూత్రం వృత్తద్వయం

త్రిభుజే భుజయోర్యోగస్తదంతరగుణో భువా హృతో లబ్ధ్యా।
ద్విస్థా భూరూనయుతా దలితాబాధే తయోః స్యాతామ్॥
స్వాబాధాభుజకృత్యోరంతరమూలం ప్రజాయతే లంబః।
లంబగుణం భూమ్యర్ధం స్పష్టం త్రిభుజే ఫలం భవతి॥ ౧౬౩॥

టీ: త్రిభుజే = త్రిభుజక్షేత్రమందు భుజయోః = భుజములయొక్క యోగః = యోగము తదంతరగుణః = భుజములయొక్క అంతరముచే గుణింపబడినదై భువా = భూమిచే హృతః = భాగింపబడినదై లబ్ధ్యా = లబ్ధముచే ద్విస్థా = రెండుచోట్ల [illegible] భూః = భూమి ఊనయుతా = వ్యవకలింపబడినదియు కలుపబడినదియునై దలితా = (సగమైన) అర్ధింపబడినదియునై తయోః = [illegible] అబాధే = ఆబాధలు స్యాతాం = అగుచున్నవి. స్వాబాధాభుజకృత్యోః = తనయొక్క ఆబాధయొక్కయు భుజముయొక్కయు వర్గములయొక్క అంతరమూలం = అంతరముయొక్క మూలము, లంబః = లంబము ప్రజాయతే = అగుచున్నది భూమ్యర్ధం = భూమియొక్క సగము లంబగుణం = లంబముచే గుణింపబడినదై త్రిభుజే = త్రిభుజక్షేత్రమందు స్పష్టం = స్పష్టమగు ఫలం = [illegible], భవతి = అగుచున్నది.

163. వి. (1) (పు 140 వ 11 పటి) రెండుభుజములయొక్కయు యోగమును ఆభుజముల అంతరముచే గుణింపవలెను. అగునట్టి ఫలమును భూమిచే భాగించగా వచ్చు లబ్ధమును ఒకచోట భూమియందు కలుపవలెను ఒకచోట భూమినుండి వ్యవకలింపవలెను. ఆ రెంటిని అర్ధింపవలెను. అవి ఆబాధలగును, అందు పెద్దదానిని పెద్ద భుజసంబంధమైనది చిన్న ఆబాధ చిన్నభుజసంబంధమైనది.

(2) ఆబాధయొక్కయు దానిభుజముయొక్కయు వర్గముల అంతరముయొక్క మూలము లంబమగును.

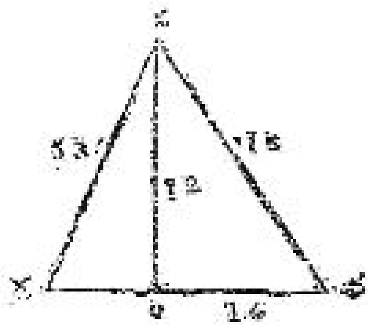
(3) లంబముచే భూమిని గుణించి అర్ధించినను భూమ్యర్ధమును గుణించినను ఆ త్రిభుజక్షేత్రముయొక్క స్పష్టఫలమగును.

ఉదాహరణమ్

క్షేత్రే మహీ మనుమితా త్రిభుజే భుజౌ తు యత్ర త్రయోదశ తిథిప్రమితౌ చ మిత్ర।
తత్రావలంబకమితిం కథయాబధే చ క్షిప్రం తథా చ సమకోష్ఠమితిం ఫలాఖ్యామ్॥ ౧౬౪॥

తా: మిత్రుడా! ఒకత్రిభుజక్షేత్రమునందు భూమి 14, భుజములు ఒకభుజ 13 రెండవభుజ 15 ఆ త్రిభుజమునందు లంబప్రమాణమును ఆబాధలను అట్లే క్షేత్రముయొక్క ఫలమును శీఘ్రముగ చెప్పుము.

న్యాసః. లబ్ధే ఆబాధే ౫, ౯ లంబశ్చ ౧౨ క్షేత్రఫలంచ ౮౪



ఇచట ప్రథమభుజ = కఖ = 13, ద్వితీయభుజ = కచ = 15, భూమి = ఖచ = 14, లంబము = కథ = 12, థఖ = ప్రథమ = 5, థచ = ద్వితీయ = 9 ఫలము 84 అగుచున్నది. ఎట్లనగా భుజములను భూమిని మాత్రమే తెలిసినచో చేసిన గణితము చూపబడుచున్నది. భుజములయోగము 13 + 15 = 28 ను భుజముల అంతరము 15 − 13 = 2 చే గుణింప 28 × 2 = 56, భూమిచే భాగింప 56 ÷ 14 = 4 లబ్ధమును భూమియందు కలుప 14 + 4 = 18 భూమినుండి వ్యవకలింప 14 − 4 = 10 అర్ధింప 9, 5 ఆబాధలు. అనగా ఖథ = 5, థచ = 9 ప్రథమభుజ 13 వర్గము 169 వలన ప్రథమాబాధ 5 వర్గము 25 ను వ్యవకలింప 169 − 25 = 144 లంబవర్గము. దీనిమూలము 12 లంబము. లేక ద్వితీయాబాధావర్గము 81 ను ద్వితీయభుజవర్గమునుండి వ్యవకలింప 225 − 81 = 144 లంబవర్గమే యగుచున్నది. లంబము 12 చే భూమి 14 ని గుణించి 168 అర్ధింప 84 ఫలము. లేక లంబముచే భూమ్యర్ధమును గుణింప $12 \times \frac{14}{2} = 12 \times 7 = 84$ ఫలము.

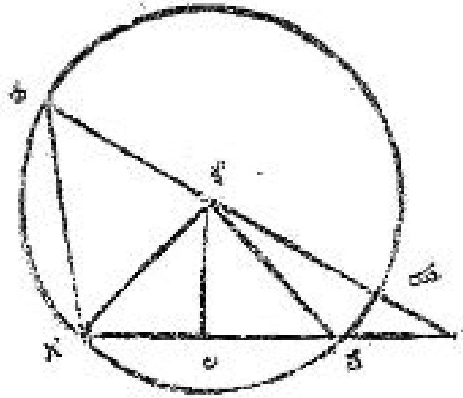
ఉపపత్తి: (1) [illegible]

[illegible] (150 పుటలో) [illegible]

[illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

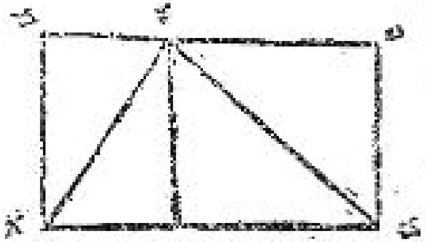


[illegible]

[illegible]

[illegible] (108 పుట) [illegible]

(4) [illegible] (150 పుట) [illegible]



[illegible]

కాబట్టి కల × గల = కభగల ఆయతఫలము, ఇట్లు కల × లఘ = ఖలఘ ఆయత

ఫలము కాబట్టి $\frac{\text{కల} \times \text{గల}}{2}$ = కగల త్రిభుజఫలము, $\frac{\text{కల} \times \text{లఖ}}{2}$ = కలఖ త్రిభుజ

ఫలమున్ను అగుచున్నవి.

$$\therefore \frac{(\text{కల} \times \text{గల})}{2} + \frac{(\text{కల} \times \text{లఖ})}{2} = \text{కగఖ త్రిభుజఫలము.}$$

$$= \frac{\text{కల} \times (\text{గల} + \text{లఖ})}{2} = \frac{\text{లంబ} \times \text{భూ}}{2} = \text{లంబ} \times \frac{\text{భూ}}{2} = \text{కగఖ త్రిభు}$$

జఫలము ఇట్లు ఫలానయనము ఉపపన్నము అగుచున్నది.

164. ప్ర. సూ (1) ఉపపత్తి ఆబాధాంతరస్వరూపమువలన అవ

గాహనము.

$$\text{ఆబాధాంతర} = \text{ఆ అం} = \frac{(\text{ద్విభు} + \text{ప్రభు}).(\text{ద్విభు} - \text{ప్రభు})}{\text{భూ}} \text{ దీనిచేత బాధలు}$$

$$\frac{\text{భూ} + \text{ఆఅం}}{2} = \frac{\text{భూ}^2 + \text{ద్విభు}^2 - \text{ప్రభు}^2}{2\ \text{భూ}} = \text{ద్వి ఆ}$$

$$\frac{\text{భూ} - \text{ఆ అం}}{2} = \frac{\text{భూ}^2 - \text{ద్విభు}^2 + \text{ప్రభు}^2}{2\ \text{భూ}} = \text{ప్ర ఆ.}$$

ఆబాధావర్గము భుజవర్గమువలన వ్యవకలించిన లంబవర్గమగును. కాబట్టి

లంబవర్గము.

$$\text{ప్రభు}^2 - \text{ప్రఆ}^2 = \text{ప్రభు}^2 - \left\{\frac{\text{భూ}^2 - \text{ద్విభు}^2 + \text{ప్రభు}^2}{2\ \text{భూ}}\right\}^2$$

$$= \frac{4\ \text{భూ}^2.\ \text{ప్రభు}^2 - (\text{భూ}^2 - \text{ద్విభు}^2 + \text{ప్రభు}^2)^2}{4\ \text{భూ}^2}$$

$$= (2\text{భూ} \times \text{ప్రభు} + \text{భూ}^2 - \text{ద్విభు}^2 + \text{ప్రభు}^2)$$

$$\times (2\text{భూ}.\text{ప్రభు} - \text{భూ}^2 + \text{ద్విభు}^2 - \text{ప్రభు}^2) \times \frac{1}{4\text{భూ}^2}$$

$$= \{(\text{భూ} + \text{ప్రభు})^2 - \text{ద్విభు}^2\} \times \{\text{ద్విభు}^2 - (\text{భూ} - \text{ప్రభు})^2\} \times \frac{1}{4\text{భూ}^2}$$

$$= \{(\text{భూ} + \text{ప్రభు} + \text{ద్విభు})\ (\text{భూ} + \text{ప్రభు} - \text{ద్విభు})\}$$

$$\times \{(\text{ద్విభు} + \text{భూ} - \text{ప్రభు})\ (\text{ద్విభు} + \text{ప్రభు} - \text{భూ})\} \frac{1}{4\text{భూ}^2} \times \frac{4}{4}$$

$$= \left(\frac{\text{భూ} + \text{ప్రభు} + \text{ద్విభు}}{2} \times \frac{\text{భూ} + \text{ప్రభు} - \text{ద్విభు}}{2} \times \frac{\text{భూ} + \text{ద్విభు} - \text{ప్రభు}}{2}\right.$$

$$\left.\times \frac{\text{ప్రభు} + \text{ద్విభు} - \text{భూ}}{2}\right) \times \frac{4}{\text{భూ}^2} \text{ దీనియొక్క మూలము లంబమగుచున్నది.}$$

$$\text{కాబట్టి లంబ} = \frac{2}{\text{భూ}} \times$$

$$\sqrt{\frac{\text{భూ} + \text{భు} + \text{ద్విభు}}{2} \cdot \frac{\text{భూ} + \text{భు} - \text{ద్విభు}}{2} \cdot \frac{\text{భూ} + \text{ద్విభు} - \text{భు}}{2} \cdot \frac{\text{భు} + \text{ద్విభు} - \text{భూ}}{2}}$$

(ఇచట ప్రభు = భు ఇట్లు గ్రహించవలయును.)

ఇందులకు మ. మ. సం. బాపుదేవశాస్త్రిగారి శ్లోకమాత్రము.

త్రిభుజే సమస్తదోర్యుతిదలం చతుస్స్థం భుజైః క్రమాద్రహితం।

తస్యాభిహతేర్మూలా ద్విఘ్నాద్భూహృల్లంబం భవేల్లంబః॥

తా॥ త్రిభుజక్షేత్రమందు అన్నిభుజములయొక్క యోగమును అర్ధముచేసి నాలుగుస్థానములందుంచి ఒకొక్కస్థానమునందు ఒకొక్కభుజము క్రమముగా వ్యవకలించవలెను వానియొక్క గుణనముయొక్క వర్గమూలమును 2 చే గుణించి భూమిచే భాగించిన లంబమగును. పైస్వరూపమునందు సముద్విభుజ (భూ + ప్రభు + ద్విభు) ఈభాగము సర్వభుజయోగార్ధమైయున్నది. దీనిని అర్ధించి ద్వితీయభుజము వ్యవకలించిన

$$\frac{\text{భూ} + \text{ప్రభు} + \text{ద్విభు}}{2} - \text{ద్విభు} = \frac{\text{భూ} + \text{ప్రభు} - \text{ద్విభు}}{2} \text{ అగుచున్నది.}$$

ఇదియే రెండవసంఖ్యగానున్నది. ఇట్లు 3, 4 సంఖ్యలను గ్రహించవలెను. తక్కినగణితము శ్లోకమునబట్టి చేయుట పైస్వరూపమువలన స్పష్టము కాగలదు.

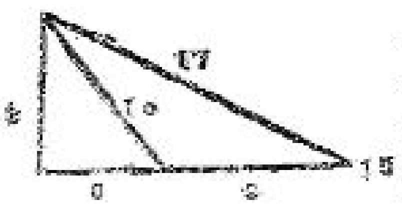
ఋజుబాహ్వోదాహరణం.

దశసప్తదశప్రమౌ భుజౌ త్రిభుజే యత్ర నవప్రమా మహీ।

అబధే వద లంబకం తథా గణితం గాణితికాశు తత్ప్రమే॥

ఉ॥ గణితజ్ఞా! యత్రిభుజక్షేత్రమునందు భుజలు 10, 17 పరిమాణములు గలవియో భూమి 9 పరిమాణముగలదియో ఆక్షేత్రమునందు ఆబాధలు లంబమును అవ్యాకులము ఫలమును నాకు శీఘ్రముగ చెప్పుము.

న్యాసః. భుజౌ ౧౦।౧౭ భూమిః ౯ అత్ర త్రిభుజే భుజయోర్యోగః ౨౭ ఇత్యాదినా లబ్ధం ౨౧ అనేన భూమిర్న సంభవతి. అతో దేవ భూః [illegible] శేషాబాధా ఋణగతా అబాధా దిగ్వైపరీత్యేనేత్యర్థః [illegible] లంబః ౮ ఫలం ౩౬.



ఇచట భూమి = 9, భుజము = 10, ద్వితీయభుజము = 17, భుజయోగము 27ను భుజాంతరముచే గుణించి భూమిచే భాగింప 189 ÷ 9 = 21 లబ్ధము. దీనిని భూమియందు కలిపి అర్ధింప $\frac{21+9}{2} = \frac{30}{2} = 15$ ఒక ఆబాధ యగుచున్నది. భూమియందలి దీనిచే తీసివేసి అర్ధింప రెండవ ఆబాధయగును. కాని ఇట్లు తీసివేయబడునప్పుడు విపరీతముగ లబ్ధమగుటచే తీసివేయ ($9 - 21 = -12$ ఋణ) (వ్యత్యయము) 12 శేషము. దీనిని అర్ధింప 6 ఋణాబాధ [illegible] తెలియుచున్నది. అనగా ఈ ఆబాధ క్షేత్రమునకు బహిర్గతమగుచున్నది. లంబమూలమునుండి భూమియందలి 6, భూమి మొదలుకొని 15, ఇట్లు పరిమాణము కల్పితవి. లంబము 8 అగుచున్నది. ఇట్టి లంబముచే భూమిని గుణించి అర్ధింప

$\frac{8 \times 9}{2} = \frac{72}{2} = 36$ ఫలము

ఆలంబము 10 యొక్కయు 8 యొక్కయు వర్గాంతరమునకైనను 17 యొక్కయు 15 యొక్కయు వర్గాంతరమునకైనను మూలమగుచున్నది. ఇట్లు క్షేత్రబహిర్గతలంబములకైనను ఫలము చెప్పవచ్చును ఆబాధలను లంబమును తెలియుటకై 9 భూమిగాకల్పించి ఈ బాహ్యాభ్యంతరము వ్రాయబడినది.

* [illegible]

ఈ క్షేత్రమునందు 17 భూమిగా నుంచిన 9, 10 భుజలగుచున్నవి. భుజయోగము 19 ను భుజాంతరము 1 చే గుణింప 19, భూమిచే భాగింప $\frac{19}{17}$ లబ్ధము. దీనిచే ఆబాధలు, $\frac{17}{1} + \frac{19}{17} = \frac{289+19}{17} = \frac{308}{17}$ అర్ధింప $\frac{154}{17}$

ఇట్లు రెండవ ఆబాధ $\frac{135}{17}$ ఆబాధాభుజవర్గాంతరము $\frac{28900}{289} - \frac{23716}{289} = \frac{5184}{289}$

లేక $\frac{23409 - 18225}{289} = \frac{5184}{289}$ లంబవర్గము. దీనియొక్క మూలము $\frac{72}{17}$ దీనిని భూమ్యర్ధముచే గుణింప $\frac{72}{17} \times \frac{17}{2} = 36$ ఫలము అగుచున్నది.

చతుర్భుజత్రిభుజయోరస్పష్టస్పష్టఫలానయనే కరణసూత్రం వృత్తం.
సర్వదోర్యుతిదలం చతుఃస్థితం బాహుభిర్విరహితం చ తద్వధాత్।
మూలమస్ఫుటఫలం చతుర్భుజే స్పష్టమేవముదితం త్రిబాహుకే॥ ౧౬౭॥

టీ॥ సర్వదోర్యుతిదలం = సర్వభుజలయొక్కయు యోగముయొక్క సగము; చతుఃస్థితం = నాలుగుచోట్లయందుంచబడినదై; బాహుభిః = భుజలచే విరహితం చ = తీసివేయబడినదగును (వేరువేరుగ); తద్వధాత్ = అట్లు తీసివేయగా మిగిలినవాటియొక్క గుణనఫలముయొక్క మూలం = మూలము చతుర్భుజే = చతుర్భుజక్షేత్రమునందు అస్ఫుటఫలం = స్ఫుటముగానిఫలము (అనగా [illegible] ఫలము కొన్ని [illegible]) ఏవం = ఈప్రకారముగా త్రిబాహుకే = త్రిభుజక్షేత్రమునందు స్పష్టం = స్ఫుటమైనఫలమై ఉదితం = చెప్పబడినది.

త్రిభుజ వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజముల ఫలము.

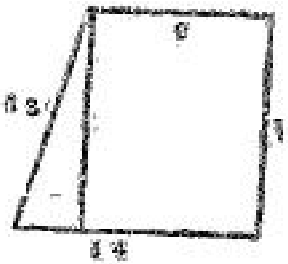
165. వృ. (1) త్రిభుజక్షేత్రమునందు మూడుభుజలనుకలిపి యోగము నర్ధించి ఆయోగార్ధమును [illegible] వేర్వేరుగవ్రాసి మూడుస్థలములయందును వేరువేరుగ త్రిభుజలను వ్యవకలనము చేయుము. అట్లు వ్యవకలనముగ శేషములయొక్కయు యోగార్ధముయొక్కయు గుణనఫలముయొక్క మూలము ఫలమగును.

(౩) [illegible]

ఉదాహరణమ్

భూమి శ్చతుర్దశకరా ముఖమంకసంఖ్యం బాహూ త్రయోదశ దివాకరసమ్మితౌ చ। లంబోఽపి యత్ర రవిసంఖ్యక ఏవ తత్ర క్షేత్రే ఫలం కథయ తత్కథితం యదాద్యైః॥

[illegible] భూమి 14 హస్తములు ముఖము 9 హస్తములు భుజము ఒకటి 13 హస్తములు రెండవది 12 హస్తములు లంబము [illegible] 12 హస్తములు [illegible]



న్యాసః। భూమిః ౧౪ ముఖం ౯ బాహూ ౧౩, ౧౨ [illegible] జాతం క్షేత్రఫలం కరణీ [illegible] [illegible] వాస్తవం ఫలం [illegible]

భూమి 14 ముఖము 9 భుజలు 13, 12 (165 [illegible]) సర్వభుజయోగము $13 + 9 + 14 + 12 = 48$ దీనిని అర్ధించ 24 [illegible] భుజలను వ్యవకలించ $24 - 13 = 11$, $24 - 14 = 10$, $24 - 12 = 12$, $24 - 9 = 15$ [illegible] $11 \times 10 \times 12 \times 15 = 110 \times 180 = 19800$ [illegible] 141 [illegible]

* [illegible] (రేఖాగణిత 4 అ 3 [illegible])

[illegible] (లీలావతీశ్లోకసూత్రము 89½) [illegible] భూమి 14 ముఖము 9 [illegible] $\frac{14 + 9}{2} = \frac{23}{2}$ [illegible]

$\frac{23}{2} \times 12 = 23 \times 6 = 138$ [illegible] (162 [illegible]) [illegible] $14 - 9 = 5$ [illegible] $12 \times 9 = 108$ [illegible] $\frac{12 \times 5}{2} = 30$ [illegible] $108 + 30 = 138$ [illegible]

అత్ర త్రిభుజస్య ప్రాగ్వదాబాధాద్య న్యాసః। భూమిః ౧౪ భుజౌ ౧౩, ౧౫ అనేనాపి ప్రకారేణ తదేవ వాస్తవం ఫలం ౮౪।

(ఉదా: 79 శ్లో) [illegible] భూమి 14 భుజలు 13, 15 [illegible]

[illegible] $14 + 13 + 15 = 42$ అర్ధించ 21 [illegible] $21 - 14 = 7$, $21 - 13 = 8$, $21 - 15 = 6$ [illegible] $\sqrt{7 \times 8 \times 6 \times 21} = \sqrt{336 \times 21} = \sqrt{7056} = 84$ [illegible] (163 [illegible]) [illegible]

[illegible] (1) 168 [illegible] [illegible]

[illegible] (164 [illegible]) [illegible] $\frac{భూ}{2}$ [illegible] ∴ [illegible]

$$\sqrt{\frac{(భూ + భు + ప్రభు)}{2}\cdot\frac{(భూ + భు - ప్రభు)}{2}\cdot\frac{(భూ - ప్రభు - భు)}{2}\cdot\frac{(భు + ప్రభు - భూ)}{2}}$$

([illegible] [illegible] = [illegible] [illegible])

[illegible]

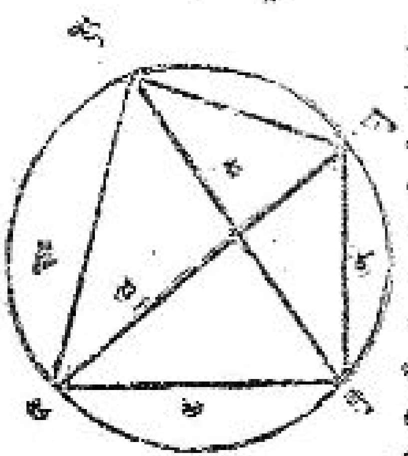
(2) [illegible]

[illegible] = [illegible] × $\frac{భూ}{2}$ (168 [illegible]) [illegible]

[illegible] = $\frac{భూ}{2}$ × [illegible] = [illegible] × [illegible] = [illegible]

[illegible]

(3) [illegible]



[illegible]

[illegible] (47 [illegible])

([illegible]) [illegible] = [illegible] + [illegible]

([illegible]) [illegible] = $\frac{[illegible]}{2}$, [illegible] = $\frac{[illegible]}{2}$

[illegible]

[illegible] (180 — [illegible]) [illegible]

(4) [illegible] (2) [illegible]

[illegible] = $\frac{[illegible]}{2}$ ∴ [illegible] = $\sqrt{\frac{స}{2}\times\left(\frac{స}{2}-అ\right)\left(\frac{స}{2}-భు\right)\left(\frac{స}{2}-చ\right)}$

[illegible] అ + భు + చ = స [illegible]

$$\therefore [illegible] = \frac{2}{అ.భు}\times\sqrt{\frac{స}{2}\left(\frac{స}{2}-అ\right)\left(\frac{స}{2}-భు\right)\left(\frac{స}{2}-చ\right)}$$

$$\therefore [illegible]^2 = \frac{4}{అ^2.భు^2}\times\frac{స}{2}\left(\frac{స}{2}-అ\right)\left(\frac{స}{2}-భు\right)\left(\frac{స}{2}-చ\right)$$

$$= \frac{(అ+భు+చ)(భు+చ-అ)}{4}\times\frac{(అ+చ-భు)(అ+భు-చ)}{4}\times\frac{4}{అ^2.భు^2}$$

$$= \frac{2భు^2.చ^2 + 2అ^2.చ^2 + 2అ^2.భు^2 - భు^4 - అ^4 - చ^4}{4\,అ^2.భు^2}$$

[illegible] 1 — [illegible]^2 [illegible]

$$[illegible] = \frac{2భు^2.చ^2 + 2అ^2.చ^2 + 2అ^2.భు^2 - భు^4 - అ^4 - చ^4}{4\,అ^2.భు^2}$$

$$= \frac{4అ^2 భు^2 - 2భు^2.ద^2 - 2అ^2.ద^2 - 2అ^2.భు^2 + భు^4 + అ^4 + ద^4}{4 అ^2 భు^2}$$

$$= \frac{భు^4 + అ^4 + ద^4 - 2భు^2.ద^2 - 2అ^2.ద^2 + 2అ^2.భు^2}{4 అ^2 భు^2}$$

కావున [illegible] సిద్ధాంతము యున్నది.

$$\therefore కోజ్య అ = \frac{అ^2 + భు^2 - ద^2}{2 అ.భు}$$ దీనిచే

భుజ[illegible] [illegible]

[illegible] కోటిజ్యా [illegible] అను

[illegible] [illegible] యున్నది.

[illegible] భుజముల [illegible] అందు [illegible] భుజములను [illegible]

[illegible] కోటిజ్య అగును.

(5) ఇట్లు $కోజ్య గా = \frac{క^2 + గ^2 - ద^2}{2 క.గ}$ అనుచున్నది.

$$\therefore ద^2 = క^2 + గ^2 - 2 క.గ\ కోజ్య గా$$
$$= అ^2 + భు^2 - 2అ.భు.\ కోజ్య అ$$

[illegible] సిద్ధాంతము [illegible] చేయనున్న

$$కోజ్య అ = కోజ్య (180 - గా) = - కోజ్య గా$$

$$\therefore అ^2 + భు^2 - 2అ.భు\ కోజ్య అ = క^2 + గ^2 + 2క.గ.\ కోజ్య అ$$

ఇచట కోజ్యా గా [illegible] కోజ్య అ చే $(-2క.గ)$ దీనిని గుణింప $+ 2క.గ\ కోజ్య అ$ అనుచున్నది ([illegible])

$$\therefore కోజ్య అ \times 2 (అభు + కగ) = అ^2 + భు^2 - క^2 - గ^2$$

$$\therefore కోజ్య అ = \frac{అ^2 + భు^2 - క^2 - గ^2}{2(అభు + కగ)} (- కోజ్య గా)$$

దీనింబట్టి 'జ్యా అ' స్వరూపమును [illegible]

$$జ్యా^2 అ = 1 - కోజ్యా^2 అ = (1 + కోజ్య అ)\ (1 - కోజ్య అ)$$ ఇది

[illegible] సిద్ధాంతముచే నగుచున్నది.

$$= \left\{1 + \frac{అ^2 + భు^2 - క^2 - గ^2}{2(అభు + కగ)}\right\} \times \left\{1 - \frac{అ^2 + భు^2 - క^2 - గ^2}{2(అభు + కగ)}\right\}$$

$$= \frac{అ^2 + భు^2 + 2అభు + 2కగ - క^2 - గ^2}{2(అభు + కగ)} \times \frac{-అ^2 - భు^2 + 2అభు + 2కగ + క^2 + గ^2}{2(అభు + కగ)}$$

$$= \frac{(అ + భు + క - గ)(అ + భు - క + గ)}{2(అభు + కగ)} \times \frac{(క + గ + అ - భు)\ (క + గ - అ + భు)}{2(అభు + కగ)}$$

[illegible] 'జ్యా అ' అగును. $\therefore జ్యా అ =$

$$\frac{\sqrt{(అ + భు + క - గ)\ (అ + భు - క + గ)\ (క + గ + అ - భు)\ (క + గ - అ + భు)}}{2(అభు + కగ)}$$

[illegible] $= \frac{2}{అభు + కగ}$

$$\times \frac{\sqrt{(అ + భు + క - గ)\ (అ + భు - క + గ)\ (క + గ + అ - భు)\ (క + గ - అ + భు)}}{4}$$

$$= \frac{2}{(అభు + కగ)} \times \sqrt{\frac{(అ + భు + క - గ)}{2} \cdot \frac{(అ + భు - క + గ)}{2} \cdot \frac{(క + గ + అ - భు)}{2} \cdot \frac{(క + గ - అ + భు)}{2}}$$

ఇచట $అ + భు + క + గ = స$ అనుకొనిన

$$జ్యా అ = \frac{2}{అభు + కగ} \times \sqrt{\left(\frac{స}{2} - గ\right)\left(\frac{స}{2} - క\right)\left(\frac{స}{2} - భు\right)\left(\frac{స}{2} - అ\right)}$$

(అకగభు) చతుర్భుజము = (కగద) త్రిభుజము + (అభుద) త్రిభుజము

$కగద\ త్రిభు = \frac{క.గ.జ్యా గా}{2}$, అభుద $త్రిభు = \frac{అ.భు.జ్యా అ}{2}$

కావున జ్యా గా = జ్యా అ అగుటచేతను

$$(అకగభు)\ చతుర్భుజము = \left(\frac{క.గ}{2} + \frac{అ.భు}{2}\right) జ్యా అ$$

$$= \frac{క.గ + ఘ.భు}{2} \times \frac{1}{ఆస + కగ}$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{స}{2} - క\right)\left(\frac{స}{2} - గ\right)\left(\frac{స}{2} - ఘ\right)\left(\frac{స}{2} - భ\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{స}{2} - క\right)\left(\frac{స}{2} - గ\right)\left(\frac{స}{2} - ఘ\right)\left(\frac{స}{2} - భ\right)} = \text{చతుర్భుజఫలము.}$$

పైగణితమునందు వృత్తాంతర్గత చతుర్భుజక్షేత్రమునందలి సంగతులను బట్టి బ్రహ్మగుప్తాచార్యులవారు చెప్పినసూత్రములు సరిపోవుచున్నవి. వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజక్షేత్రములకే సరిపడునని స్పష్టమగుచున్నది.

కనుక వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజక్షేత్రఫలానయనమును ఈకవిన్ను సూచుచున్నది. అభీష్టములగు భుజములు నాలుగిటిచేతను అనేకవిధములగు చతుర్భుజక్షేత్రములగును. అందు అన్నిటియొక్కయు పెద్దవైనఫలములలో వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజక్షేత్రఫలము అధికముగుచున్నది. దీనిం గూర్చి విస్తరింపుటచే నిటు వ్రాయుటలేదు. (స్థూలత్వనిరూపణ చూ)

166. సూ. (1) అథస్థూలత్వనిరూపణార్థం సూత్రం

చతుర్భుజస్యానియతౌ హి కర్ణౌ కథం తతోఽస్మిన్నియతం ఫలం స్యాత్॥

ప్రసాధితౌ తచ్ఛ్రవణౌ యదాద్యైః స్వకల్పితౌ తావితరత్ర న స్తః।

తేష్వేవ బాహుష్వపరౌ చ కర్ణా వనేకధా క్షేత్రఫలం తతశ్చ॥ ౧౬౯॥

టీ॥ హి చతుర్భుజస్య కర్ణౌ అనియతౌ తతః అస్మిన్నియతం ఫలం కథం స్యాత్ = ఏకారణమువలన చతుర్భుజక్షేత్రమునకు కర్ణములు నియతములు గాని విధము ఆకారణమువలన ఈచతుర్భుజక్షేత్రమునందు నియతమగుఫలమెట్లాగును? యత్ ఆద్యైః ప్రసాధితౌ స్వకల్పితౌ తచ్ఛ్రవణౌ ఇతరత్ర న స్తః తతః తేషు బాహుషు ఏవ అపరౌ కర్ణౌ అనేకధా క్షేత్రఫలం చ = ఏకారణమువలన పూర్వాచార్యులచే సాధింపబడినవియును తమచే కల్పింపబడినవియును (వాస్తవములు కానివి) అగు (శ్లో. సూ. 99 చూ) ఆచతుర్భుజకర్ణములు ఇతరక్షేత్రములందుండవో ఆకా

రణమువలన ఆభుజములందే ఇతరములగు కర్ణములున్ను అనేకవిధములుగ క్షేత్రఫల మున్ను అగుచున్నది.

వా. భా. చతుర్భుజే హ్యన్యతరకోణే వాహ్యే మధ్యాంతః ప్రవేశ్యమానే తత్సంసక్తం కర్ణం సంకోచయతి। ఇతరో బహిరప సరన్ కోణః తత్సంసక్తం కర్ణం వర్ధయతి। అత ఉక్తం "తేష్వేవ బాహుష్వపరౌ చ కర్ణా" వితి

టీ॥ చతుర్భుజక్షేత్రమునందు పరస్పరసమ్ముఖములగు రెండుకోణములను క్షేత్రముయొక్క అంతర్భాగమునకు జరుపుచో ఆకోణములను కలిపియున్న కర్ణము పొట్టియగును. అప్పుడు ఇతరకోణములు క్షేత్రబహిర్భాగమునకు జరుగుచున్నవి. ఆయితరకోణములతో కలిసియున్న కర్ణము పొడవగుచున్నది. (ఇది అభీష్టభుజపరిమాణములగు కొలకోలను భూమియందునుంచి చతుర్భుజముకోణములను పొడిచెదిదినచో స్పష్టము గాగలదు) కావున నే ఆభుజములందే ఇతరములగు కర్ణము లగునని చెప్పబడెను. (88 ఉదా. శ్లో. చూ)

(2) లంబయోః కర్ణయోర్వైక మనిర్దిశ్యాపరం కథం।

పృచ్ఛత్యనియతత్వేఽపి నియతం చాపి తత్ఫలం॥ ౧౭౦॥

స పృచ్ఛకః పిశాచో వా వక్తా వా నితరాం తతః।

యో న వేత్తి చతుర్బాహుక్షేత్రస్యానియతాం స్థితిం॥ ౧౭౧॥ *

టీ॥ లంబములలోనైనను కర్ణములలోనైనను ఒకదాని నైనను చెప్పక లంబముగాని కర్ణముగాని తెలియని చతుర్భుజక్షేత్రమునందు ఫలము నియతము కాదని యెఱుగని వాఁడు లంబకర్ణములలో నొకదానినిచ్చి ఎట్లు ప్రశ్నించును?

అట్లు ప్రశ్నించువాడును జానికి జవాబిచ్చువాడును సత్యముచెప్పువాడును చతుర్భుజక్షేత్రముయొక్క స్థితి, నియతముగానిదనుట తెలియని వారగుటచే గణకులలో అవివేకులనియెంచును.

---

* కర్ణజ్ఞానేన వినా చతురస్రే లంబకం ఫలం యద్వా।
వక్తుం వాంఛతి గణకో యోఽసౌ మూర్ఖః పిశాచో వా॥ ఆర్యభట్టు.
లంబయోః కోణయోర్వాపి కర్ణయోర్వైక మంతరా।
నరం కథం పృచ్ఛతీహ నియతం తత్ఫలం కిమత్ర సంభావ్యతే.

సమచతుర్భుజము, వర్గక్షేత్రము ఆయతము, సమలంబము.
ఈ క్షేత్రములందు ఫలానయనము.

సమచతుర్భుజాయతయోః ఫలానయనే కరణసూత్రం
సార్ధశ్లోకద్వయం.

ఇష్టా శ్రుతిస్తుల్యచతుర్భుజస్య కల్ప్యాథ తద్వర్గవివర్జితా యా।
చతుర్గుణా బాహుకృతిస్తదీయం మూలం ద్వితీయశ్రవణప్రమాణం॥
అతుల్యకర్ణాభిహతిర్ద్విభక్తా ఫలం స్ఫుటం తుల్యచతుర్భుజే స్యాత్।
సమశ్రుతౌ తుల్యచతుర్భుజే చ తథాయతే తద్భుజకోటిఘాతః॥
చతుర్భుజేఽన్యత్ర సమానలంబే లంబేన నిఘ్నం కుముఖైక్యఖండం॥

టీ॥ (1) తుల్యచతుర్భుజస్య — సమచతుర్భుజక్షేత్రమునకు, ఇష్టా — ఇష్టమైన, శ్రుతిః — కర్ణము, కల్ప్యా — కల్పించవలెను. అథ — పిమ్మట, తద్వర్గవివర్జితా — ఆ ఇష్టకర్ణముయొక్క వర్గముచే వ్యవకలించబడిన, చతుర్గుణా బాహుకృతిః — నాలుగుచే గుణించబడిన భుజవర్గముగలదో, తదీయం మూలం — దానియొక్క (భుజవర్గమును 4 చే గుణించి ఇష్టకర్ణవర్గమును వ్యవకలించినసంఖ్యయొక్క) మూలం — మూలము, ద్వితీయశ్రవణప్రమాణం — రెండవకర్ణముయొక్క ప్రమాణమగును.

(2) తుల్యచతుర్భుజే — సమచతుర్భుజక్షేత్రమునందు అతుల్యకర్ణాభిహతిః — సమములు కానట్టి రెండుకర్ణములయొక్కయు గుణనము ద్విభక్తా — రెంటిచే భాగించబడినదియగునో స్ఫుటంఫలం — స్ఫుటమగు ఫలము అగును.

(3) సమశ్రుతౌ తుల్యచతుర్భుజే — సమమైన కర్ణములుగల సమభుజచతుర్భుజక్షేత్రమునందు తథా — అట్లే ఆయతే — ఆయతక్షేత్రమునందు తద్భుజకోటిఘాతః ఫలం — ఆ క్షేత్రముయొక్క భుజకోటిగుణనము ఫలము.

(4) అన్యత్ర — ఇతరమైన సమానలంబే — సమానలంబములుగల చతుర్భుజక్షేత్రమందు కుముఖైక్యఖండం — భూమియొక్కయు ముఖముయొక్కయు యోగములో సగము లంబేన నిఘ్నం — లంబముచే గుణించబడినది ఫలం — ఫలము.

167. ప్ర. (1) సమభుజ చతుర్భుజక్షేత్రమునందు ఒక కర్ణము మనకు తెల్పించి (తెలిసికొని) దానిచే రెండవకర్ణమును తెలిసికొనుట. ఎట్లనగా: భుజముయొక్క వర్గమును 4 చే గుణించి దానివలన ఆ తెలిసినకర్ణముయొక్క వర్గమును వ్యవకలించి మిగిలినదానికి మూలము ద్వితీయకర్ణప్రమాణమగును.

(2) ఇట్లు భిన్నకర్ణములుగల సమచతుర్భుజక్షేత్రము విషమకర్ణసమచతుర్భుజమని చెప్పబడుచున్నది. అట్టి క్షేత్రమునందు కర్ణముల గుణనమును 2 చే భాగించిన క్షేత్రఫలమగును. *

(3) సమములగు కర్ణములుగల చతుర్భుజక్షేత్రము వర్గక్షేత్రము. వర్గక్షేత్రమునందును ఆయతక్షేత్రమునందును భుజకోటిఘాతము క్షేత్రఫలము.

(4) 1 సమచతుర్భుజము. 2 వర్గక్షేత్రము. 3 ఆయతము ఈ మూడిటికంటె భిన్నమైన చతుర్భుజము విషమచతుర్భుజము. అది రెండువిధములు. 1 సమానలంబములుగల విషమచతుర్భుజము. 2 విషమలంబములుగల విషమచతుర్భుజము. అట్టి సమలంబవిషమచతుర్భుజమునందు భూమియొక్కయు ముఖముయొక్కయు యోగమునందర్ధమును లంబముచే గుణించిన క్షేత్రఫలమగును.

అత్రోద్దేశకః.

క్షేత్రస్య పంచకృతితుల్యచతుర్భుజస్య కర్ణౌ తతశ్చ గణితం గణక ప్రచక్ష్వ। తుల్యశ్రుతేశ్చ ఖలు తస్య తథాయతస్య యద్విస్తృతిః షడథ దైర్ఘ్యమథాష్టకం చ॥ ౧౭౯॥

తా॥ గణకుడా! 1 ఒక చతుర్భుజక్షేత్రమునందు 4 భుజములును ప్రత్యేకము (25) ప్రమాణముగలవి. ఆ క్షేత్రమునందు కర్ణములను క్షేత్రఫలమును చెప్పుము. సమకర్ణములుగల భుజలచేనైన చతుర్భుజక్షేత్రము (వర్గక్షేత్రము)నందు క్షేత్రఫలమెంతయగును?

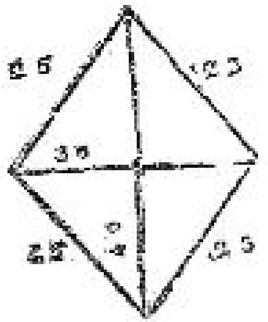
ఒక ఆయతక్షేత్రమునందు వెడల్పు 6, పొడవు 8, ఆ క్షేత్రమునందు క్షేత్రఫలమెంతయగును?

---

* పరస్పరలంబరూపములైన కర్ణములుగల విషమచతుర్భుజమునందును ఈపద్ధతిచే సరియగుఫలము వచ్చుచున్నది. (బాపుదేవశాస్త్రిగారు)

(1) ప్రథమోదాహరణే న్యాసః. భుజాః ౨౫, ౨౫, ౨౫, ౨౫ అత్ర త్రిభుజకర్ణ తోమేకాం ౩౦ కృతిం ప్రకల్ప్య యథోక్త కరణేన జాతా అన్యా కృతిః ౪౦ ఫలంచ ౬౦౦

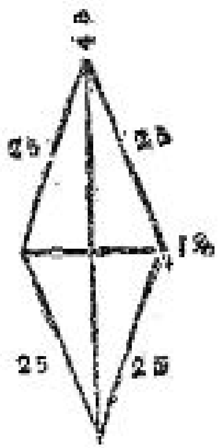
కర్ణాన్యూనమూ యొకటికర్ణము 30 అనుకొనుడు



భుజవర్గము $25^2 = 625$ దీనిని 4 చే గుణింప 2500 ఇందులొకర్ణము 30 యొక్క వర్గము 900 ను వ్యవకలింప $2500 - 900 = 1600$ దీనియొక్క వర్గమూలము 40 రెండవకర్ణము.

కావున కర్ణములగుణనము $40 \times 30 = 1200$ దీనిని 2 చే భాగించగా $\frac{1200}{2} = 600$ అని క్షేత్రఫలము అగుచున్నది.

అథవాన్యాసః చతుర్భుజస్య మితా మేకాం కృతింప్రకల్ప్యఉక్తవత్కరణేనజాతా అన్యాకృతిఃరలా ఫలంచ ౩౩౬,

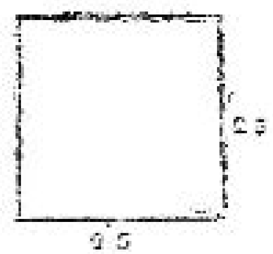


(2) లేక అల్పముగనున్న కర్ణము (తిర్యక్కర్ణము) 14 కల్పించినచో భుజవర్గమును 4 చే గుణించి కల్పితకర్ణవర్గమును వ్యవకలింప $2500 - 196 = 2304$ దీనియొక్క వర్గమూలము 48 రెండవ కర్ణము (ఊర్ధ్వకర్ణము). ఒకకర్ణమును మరియొక కర్ణముచే గుణించి యర్థింప $\frac{48 \times 14}{2} = 48 \times 7 = 336$ అని క్షేత్రఫలమగుచున్నది.

ఇట్లు ఒకకర్ణమునుబట్టి మరియొక కర్ణమున్ను ఆకర్ణములబట్టి ఫలమున్ను చతుర్భుజ క్షేత్రము నందు మార్పుచెందుచున్నది.

నందు ఒక కర్ణమును కల్పింపరాదనుట చెప్పబడినది. అట్లు కల్పించు నప్పుడు రెండుభుజములయొక్క యోగమునకంటె తక్కువసంఖ్యగానుండునట్లుగను కల్పింపవలయును.

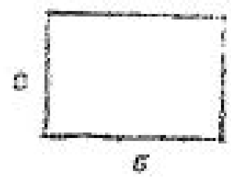
ద్వితీయోదాహరణేన్యాసః ‘తత్ర ఋజుభుజక్షేత్రే కర్ణ’ ఇతి జాతా కరణేనజాతా కృతి రుభయత్రాప్యేవ కరణి ౧౨౫౦ గణితంచ ౬౨౫.



ఇది వర్గక్షేత్రము. భుజకోటివర్గయోగము $25^2 + 25^2 = 625 \times 2 = 1250$ దీనియొక్క వర్గమూలము $\sqrt{1250} =$ కర్ణము.

భుజకోటిచే గుణింప $25 \times 25 = 625$ క్షేత్రఫలమగుచున్నది. ఇందు రెండుకర్ణములును సమములే యగుచున్నవి.

అథాయతస్యన్యాసః, విస్తృతిః ౬ దైర్ఘ్యం ౮ అస్య గణితం ౪౮.



ఆయతక్షేత్రమునందు వెడల్పు 6 పొడవు 8 వీనిం రెంటియొక్క గుణనము $8 \times 6 = 48$ క్షేత్రఫలమగుచున్నది. ఇందుకర్ణము 10 అగుచున్నది ఇందు రెండుకర్ణములును సమములు.

ఉపపత్తి:—ద్వితీయకర్ణానయనము గూర్చి:—

పైన (లీలావతి)యిచ్చిన ప్రథమోదాహరణమందలి క్షేత్రమునుగుర్తింపుము. అందు తిర్యక్కర్ణముచే నాక్షేత్రము రెండుత్రిభుజములుగా విభజింపబడి కనబడుచున్నది. ఆత్రిభుజములు రెండింటికిని తిర్యక్కర్ణము భూమి(ఆధారము)అగుచున్నది. ఆత్రిభుజములు సమద్విబాహుక త్రిభుజములగుటచే ఒక్కొక త్రిభుజము నందును లంబములు ఆధారమును అర్ధించుచున్నవి. అనగా రెండులంబములును ఆధారార్ధప్రదేశమునందును కలియుచున్నవి. కావున తిర్యక్కర్ణార్ధము భుజ. ఊర్ధ్వకర్ణార్ధము కోటి, భుజ కర్ణము, ఇట్లు 4 త్రిభుజములగుచున్నవి. కావున

(1) ప్ర క = ప్రథమకర్ణ, ద్వి క = ద్వితీయకర్ణము భు = భుజ అనుకొందము,

$భు^2 - \left(\frac{ప్ర క}{2}\right)^2 = \left(\frac{ద్వి క}{2}\right)^2$ (150 పు. చూ.) సమచ్ఛేదము

చేయగా $\frac{4 భు^2}{4} - \frac{ప్ర క^2}{4} = \frac{ద్వి క^2}{4}$ ∴ $4 భు^2 - ప్ర క^2 = ద్వి క^2$

∴ $\sqrt{4 భు^2 - ప్ర క^2} = ద్వి క$ ఇట్లు కర్ణానయన మగుచున్నది.

(2) విషమకర్ణ సమచతురస్రఫలానయనోపపత్తి:—

$త్రిభుజఫలము = లంబ \times \frac{భూ}{2} = \frac{ప్ర క}{2} \times \frac{ద్వి క}{2} = \frac{ప్ర క \times ద్వి క}{2 \times 2}$

$విషమచతురస్రఫలము = త్రిభుజ ఫల \times 2 = \frac{(ప్ర క \times ద్వి క)2}{2 \times 2} = \frac{ప్ర క \times ద్వి క}{2}$

అగుచున్నది.

(3) వర్గక్షేత్రమునందు క్షేత్రఫలము వర్గమే యగుచున్నది. వర్గము భుజకోటి ఘాతమే యగుచున్నది. (150 పు. చూ.) అట్లు ఆయతమునందును భుజకోటిఘాతమే క్షేత్రఫలము. క్షేత్రఫలము వర్గముగా సమచతురశ్రము కావున అట్టి సమచతురశ్రములకు కోణములు సమానములగుటచే వర్గక్షేత్రమునందును భుజకోటిఘాత మొక్కటియే యగుచున్నది యనుట స్పష్టము.

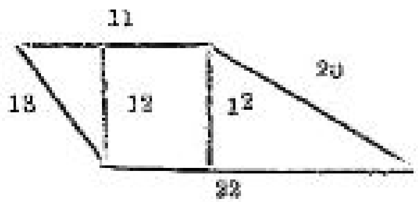
(4) సమలంబక్షేత్ర ఫలానయనోపపత్తి (83 పుట. చూ.) మొదలు వ్రాయబడెను.

ఉదాహరణమ్.

క్షేత్రస్యాస్య వదనం మదనారితుల్యం విశ్వంభరా ద్విగుణితేన ముఖేన తుల్యా। బాహూ త్రయోదశనఖప్రమితౌ చ లంబ స్సూర్యోన్మితశ్చ గణితం వద తత్ర కిం స్యాత్ ॥ ౬౩

తా। ఒకక్షేత్రమునకు ముఖము (మదనారి=రుద్రులు) 11 పరిమితిగలది భూమి ద్విగుణితమైన ముఖముతో సమానముగనున్నది. భుజములు 13, 20 పరిమాణములుగలిగియున్నవి, లంబము 12 పరిమితిగలది. ఆక్షేత్రమునందు క్షేత్రఫలమెంత యగును? చెప్పుము.

న్యాసః. వదనం ౧౧ విశ్వంభరా ౨౨ బాహూ ౧౩, ౨౦ లంబః ౧౨ అత్ర "సర్వదోర్యుతిదలం" ఇత్యాదినా స్థూలఫలం ౨౫౦ వాస్తవం తు "లంబేన నిఘ్నం కుముఖైక్యఖండం" ఇతి జాతం ఫలం ౧౯౮ క్షేత్రస్య ఖండత్రయం కృత్వా స్పష్టఫలోపపత్తిః ప్రదర్శ్యతే.



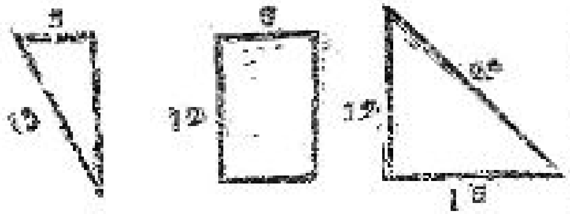
ఈ క్షేత్రమునందు ముఖము 11 అనగా ఈశ్వరులు 11 హస్తములుగలదియు భూమి 22 హస్తములు ఒకభుజ 13 హస్తములు మరియొకభుజ 20 హస్తములు లంబము 12 హస్తములు ఇందు క్షేత్రఫలమెంత? అని ప్రశ్నము.

ఇచట (155 పు 2) చే అస్పష్టఫలము 250 ఎట్లనగా 4 భుజములయొక్క యోగము 66 దీనియర్ధము 33 దీనిచే భుజలను వేరువేరుగ వ్యవకలించగా శేషములు 11, 20, 13, 22 వీనిగుణనము 62920 దీనియొక్క ఆసన్నమూలము 250 అగుచున్నది. కాని ఈచతుర్భుజము స్పష్టాంగీకృతముగా నుండుటచే ఆఫలము స్పష్టమగుటలేదు. కావుననే అనవస్థితనియతి లంబముచే గాని కర్ణముచే గాని ఫలము తెలుసుకొనవలయునని చెప్పబడెను. ఇప్పుడు పై (167 పు. 4) పద్ధతిచే ఫలానయనము చేయబడియున్నది. భూమి22 ముఖము 11 వీనియోగము 33 దీని యర్ధము $\frac{33}{2}$ దీని లంబము 12చే గుణించిన స్పష్టఫలమగుచున్నది. $\frac{33}{2} \times \frac{12}{2}$ $= 33 \times 6 = 198$ క్షేత్రఫలము.

ఈ ఫలము సరియైనదియగుట పై క్షేత్రమును ఖండములుగ చేసి వేరువేరు ఫలములను కలుపుటచే స్పష్టము కాగలదు. కావున నట్లు చూపబడుచున్నది.

న్యాసః. ఖండత్రయదర్శనం ప్రథమస్య భుజకోటికర్ణాః ౫, ౧౨, ౧౩ ద్వితీయస్యాయతస్య విస్తృతిః ౬ దైర్ఘ్యం ౧౨ తృతీయస్య భుజకోటికర్ణాః ౧౬, ౧౨, ౨౦ అత్ర త్రిభుజయోః భుజకోటిఘాతార్ధం ఫలం ఆయతే తద్భుజకోటిఘాతః ఫలం. యథా

పరిజ్ఞాతే క్షేత్రే ఫలం ద్విత్రిసంఖ్యే క్షేత్రే [illegible] ఏవం [illegible] సర్వక్షేత్రఫలం.



పై చతురస్ర క్షేత్రము నందలి 2 లంబముల చేతను ఆ క్షేత్రము 3 ఖండములుగ విభజింపబడినది. అందు ఎడమ వైపు భుజ కర్ణము, లంబము కోటి, లంబమూలమునుండి ముఖమువరకు భుజాగ్రమువరకు గల అంతరము భుజ. (లేక కోటికర్ణ వర్గాంతరమూలము భుజ) ఇదియొక జాత్యము.

లంబము కోటి, [illegible] ముఖమునందు [illegible] 11—5 = 6 శేషము భుజ, ఇది ఆయత క్షేత్రము. [illegible] భుజలను భూమి 22 నుండి [illegible] 22—6 = 16 శేషము భూమి, లంబము కోటి, కుడిప్రక్కభుజ కర్ణము. ఇది మరియొక జాత్యము. ఇట్లు మూడు క్షేత్రములుగ విభజించితిమి. ప్రథమజాత్యమునందు భుజకోటిఘాతార్ధము $\frac{5 \times 12}{2} = \frac{60}{2} = 30$ క్షేత్రఫలము. ఆయతమునందు $12 \times 6 = 72$ భుజకోటిఘాతము క్షేత్రఫలము. ద్వితీయ జాత్యమునందు $\frac{12 \times 16}{2} = 96$ భుజకోటిఘాతార్ధము క్షేత్రఫలము. అన్నిటిని కలుప $30 + 72 + 96 = 198$ సమస్తము క్షేత్రఫలము.

ఉపపత్తి:— ప్రథమ క్షేత్రమునందు భుజ = ముఖఖండము = ముఖఖ, కోటి = లంబ, ఆయతమునందు కోటి = లం, భుజ = ముఖఖ లేక భూఖండము = భూఖ, ద్వితీయ క్షేత్రమునందు లం = కోటి భుజ = భూఖ కావున ఫలముల యోగము

$$\frac{\text{ముఖఖ} \times \text{లం}}{2} + \text{లం} \times \text{ముఖఖ}' + \frac{\text{లంబ} \times \text{భూఖ}}{2} = \text{క్షేత్రఫల}$$

ఇచట లం $\times$ ముఖఖ' — లం $\times$ భూఖ' $\therefore$ లం $\times$ భూఖ' + లం $\times$ ముఖఖ'

$$= \text{లం} \times \text{ముఖఖ}' \times 2$$

$$\therefore \frac{\text{ముఖఖ} \times \text{లం}}{2} + \frac{(\text{లం} \times \text{ముఖఖ}')2}{2} + \frac{\text{లంబ} \times \text{భూఖ}}{2}$$

$$= \frac{\text{ముఖ} \times \text{లం}}{2} + \frac{\text{భూ} \times \text{లం}}{2} = \frac{(\text{భూ} + \text{ముఖ})}{2} \times \text{లంబ}$$

ఇది క్షేత్రఫలము. ఇట్లు పద్ధతి చూపబడినది.

[illegible] భిన్నప్రమాణములుగల లంబములుగల క్షేత్రమందును ఉదాహరింపవలెను. అందు లంబములయోగార్ధమును భూమిచే గుణింప ఫలము అగును. ఎట్లనగా:— పై క్షేత్రమునందు లంబము భూమియందుకొనుచో ముఖఖండము 6, ఒకలంబము. భూమి 22 ఒకలంబము అగుచున్నది. అనగా ఈ క్షేత్రము పై 2-3 క్షేత్రఖండములయోగముచే నగుచున్నది. ఇందు లంబయోగార్ధము $\frac{22 + 6}{2} = 14$ దీనిని భూమి 12 చే గుణింప 168 ఇది ద్వితీయ తృతీయ క్షేత్రఫలముల యోగముతో సమము. $72 + 96 = 168$ అగుచున్నది.

అన్యదుదాహరణం

పంచాశదేకసహితా వదనం యదీయం భూః పంచసప్తతిమితా ప్రమితోఽష్టషష్ట్యా। సవ్యో భుజో ద్విగుణవింశతిసమ్మితోఽన్యస్తస్మిన్ఫలం శ్రవణలంబమితీ ప్రచక్ష్వ॥ ౧౬౪॥

విషమచతురస్రమునందు లంబములవలన కర్ణము, కర్ణమువలన లంబమును, తెలిసికొనుట. ఒక కర్ణముచే మరియొక కర్ణమును తెలిసికొనుట. వానివలన భుజములు [illegible] పై క్రియయొక్క సూత్రములు చెప్పబడుచున్నవి.

తా॥ ఒక క్షేత్రమునందు ముఖము 51 హస్తములు భూమి 75 హస్తములు ఒకభుజ 68 హస్తములు మరియొకభుజ 40 హస్తములు ఆ క్షేత్రమునందు కర్ణలంబములను ఫలప్రమాణమును [illegible] చెప్పుము.

విషమచతురస్రకరణము.

అత్రిఫలానిలంబకృతీనాం నినిమ్త్వం సూత్రం వ్యాహారం।

జ్ఞాతేఽవలంబే కృతవత్ప్రకల్ప్య తేనావలంబః ఫలంస్యాత్ప్రయుక్తం సంతత్రి ... కర్ణస్యానియతత్వాల్లంబోఽప్యనియతస్తత్ర ॥

లంబజ్ఞానాయకర్ణజ్ఞానం వృత్తార్థం

చతుర్భుజాంతస్త్రిభుజేఽవలంబః ప్రాగ్వద్భుజౌ కర్ణభుజౌ మహీ భూః ॥ ౧౭ ॥

టీ॥ అవలంబే = లంబము, జ్ఞాతే = తెలియబడినచో కర్ణః = కర్ణము (తెలియును). కృతౌ = కర్ణము (జ్ఞాతాయాం) తెలిసినచో, లంబః = లంబము (తెలియును). ... ఫలం = ఫలము నియతం = నియతమునది. స్యాత్ = అగును.

లంబమును తెలియుట.

చతుర్భుజాంతః = చతుర్భుజము యొక్క లోపలనున్న, త్రిభుజే = త్రిభుజమందు అవలంబః = లంబము = ప్రాగ్వత్ = పూర్వము వలెనే (సాధింపవలెను)

కర్ణభుజౌ = కర్ణమును, భుజమును, భుజౌ = భుజము. మహీ = చతుర్భుజము నందలి ఆధారము, భూః = భూమి.

168. వ్యా. చతుర్భుజములందు లంబము తెలిసిన కర్ణము తెలియగలదు. కర్ణము తెలిసినచో లంబము తెలియగలదు. అట్లు లంబకర్ణములు తెలిసినచో ఫలము నియతమైనది తెలియును. లంబముగాని కర్ణముగాని తెలియనిచో అపుడు కర్ణము లంబమును అనియతములు. అపుడు ఫలమును అనియతము.

అట్టి చతుర్భుజములందు లంబము తెలియవలయునన్నచో కర్ణమును మొదలు కల్పించుకొనవలయును. (లేక కర్ణమును తెలుసుకొనవలయును)

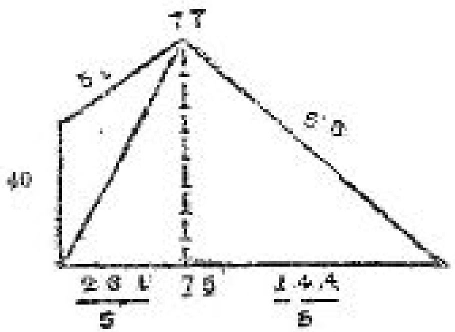
ఆకర్ణముచే చతుర్భుజము రెండు త్రిభుజములుగ నగుచున్నది. అందు ఒక త్రిభుజమందు ఆకర్ణము ఒక భుజ. చతుర్భుజక్షేత్రమునందలి భుజ రెండవ భుజ. చతుర్భుజము యొక్క భూమి భూమి. ఇట్లు త్రిభుజమును కల్పించి పూర్వపద్ధతి చే (163 వ్యా.) చే లంబమును సాధింపవలయును.

ఒకకర్ణమును భుజగ కల్పించి భూమిని భూమిగను చతుర్భుజ భుజమును భుజముగను కల్పించి ఇట్లు కల్పితత్రిభుజమునకు లంబమును సాధించుట ఇందు

చెప్పబడినది. కావున నిచట కల్పనామార్గము చెప్పబడుటచే ఉపపత్తి యొక్క అవశ్యకత లేదు.

న్యాసః. వదనం ౫౧ భూమిః ౭౫ భుజౌ ౬౮, ౪౦

అత్ర లంబజ్ఞానార్థం సవ్యభుజాగ్రాద్ దక్షిణభుజమూలగామీ ఇష్టకర్ణః సప్తసప్తతి ౭౭ మితః కల్పితః తేన చతుర్భుజాంతస్త్రిభుజం కల్పితమ్. తత్రాసౌ కర్ణ ఏకో భుజః. ద్వితీయస్తు సవ్యభుజః ౬౮. భూస్తత్ర ౭౫ అత్ర ప్రాగ్వల్లబ్ధోఽవలంబః $\frac{308}{5}$



ఈ క్షేత్రమందు కుడిప్రక్క భుజం 40 అనియు ఎడమభుజ 68 అనియు ఆచార్యులవారు ఉదాహరణము నిర్ణయించినారు. కుడి ఎడమలు చూచువానికి క్షేత్రము నందలి కుడి ఎడమలనియు, ఎడమ కుడి అనియు గ్రహింపవలెను. అందుచే కొందరు క్షేత్రమును అనుసరించి ఈ మాదిరిపద్ధతిగా చూపియున్నారు. మరికొందరు మాదుచూపినమునుపరించి దీనికి వ్యతిరేకముగ ఇందలి 68 భుజమైపుప 40 భుజమును 40 భుజమైపుప 68 భుజమును చూపియున్నారు. మనము చాలామంది అనుసరించుచు పద్ధతిచే ఇందు చూపబడినది.

ఇచట లంబమును తెలిసికొనుటకు 68 భుజము యొక్క అగ్రమునుండి 40 భుజము యొక్క మూలమునకు మధ్య కర్ణము 77 కల్పింపబడినది. (ఈ కల్పించుటలో కర్ణమునకు మరియొక ప్రక్కగల చిన్నభుజము యొక్క యోగము 40 + 51 = 91 కంటె పెద్దదికాకుండునట్లును చతుర్భుజమునట్లును తీరుతో సమముగాని దానికంటె చిన్నదిగాని కాకుండునట్లును యోచింపవలెను) ఇప్పుడు చతుర్భుజక్షేత్రమునందు రెండు త్రిభుజములైనవి. అందు భూమి 75 భూమిగాగల త్రిభుజము యొక్క చతుర్భుజములోని ఎడమభుజ 68 యున్ను కర్ణము 77 న్ని భుజములు.

జ్ఞాతేవలంబే కృత్రిమశ్రవణే బాహులంబః ఫలంస్యాన్న యుతం సుతరాం [illegible]
కర్ణాస్యాద్విమయుత [illegible]

లంబజ్ఞానాయకర్ణానయనాయసూత్రం వృత్తార్ధం

చతురశ్ర [illegible] త్రిభుజేవలంబః [illegible] కర్ణ [illegible]

టీ॥ అవలంబే = లంబము, జ్ఞాతే = తెలియబడినచో కర్ణః = కర్ణము (తెలియును). [illegible] = కర్ణము (జ్ఞాతాయాం) తెలిసినచో, లంబః = లంబము (తెలియును). [illegible] ఫలం = ఫలము [illegible] = [illegible], స్యాత్ = అగును.

లంబమును తెలియుట.

చతురశ్రజాంతః = చతురశ్రములోపల [illegible] త్రిభుజే = త్రిభుజమందు అవలంబః = లంబము = [illegible]

కర్ణభుజా = కర్ణమును, భుజమును, [illegible]

168. వ్రా. [illegible] లంబము తెలిసిన కర్ణము [illegible] కర్ణము తెలిసిన [illegible] లంబము [illegible]. ఫలము [illegible] తెలియును. లంబముగాని, కర్ణముగాని తెలియనిచో అపుడు కర్ణము లంబమున్ను అనియూహించుట [illegible].

అట్టి చతురశ్రములందు లంబము [illegible] కర్ణమును [illegible] కల్పించుకొనవలయును. (లేక కర్ణమును [illegible])

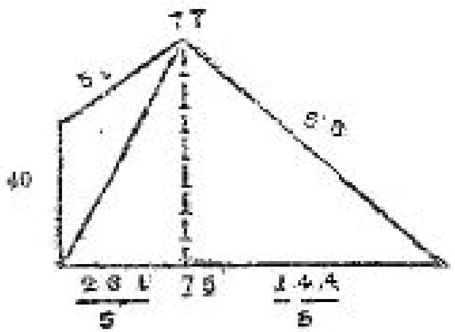
ఆకర్ణముచే చతురశ్రము రెండు త్రిభుజములుగ నగుచున్నది. అందు ఒక త్రిభుజమందు ఆకర్ణము ఒక భుజ. చతురశ్రక్షేత్రమునందలి భుజ [illegible] భుజ. చతురశ్రముయొక్క భూమి భూమి. ఇట్లు త్రిభుజమును కల్పించి పూర్వోక్త [illegible] (163 వ్రా.)చే లంబమును సాధింపవలయును.

ఒక కర్ణమును భుజగ కల్పించి భూమిని భూమిగను చతురశ్రభుజమును భుజముగను కల్పించి ఇట్లు కల్పితత్రిభుజమునకు లంబమును సాధించుట ఇందు

చెప్పబడినది. కావున నిచట కల్పనామార్గము చెప్పబడుటచే ఉపపత్తియొక్క [illegible].

న్యాసః. వదనం 40 భూమిః 75 భుజౌ 51, 68

అత్ర లంబజ్ఞానార్థం [illegible] ఇష్టకర్ణః సప్తసప్తతి 77 మితః కల్పితః తేన చతురశ్రాంతస్త్రిభుజం కల్పితమ్. తత్రాసౌ కర్ణ ఏకోభుజః. ద్వితీయస్తు సవ్యభుజః 51. భూమిస్సైవ 75 అత్ర ప్రాగ్వల్లంబః $\frac{308}{5}$



ఈ క్షేత్రమునందు [illegible] భుజ 40 అనియు [illegible] 68 అనియు ఆచార్యులవారు [illegible] నిర్ణయించినారు. [illegible] క్షేత్రము [illegible] చూచినారు [illegible] దీనికి [illegible] ఇందలి 68 భుజకు పైన 40 భుజమున్ను 40 భుజకుపైన 68 భుజమున్ను చూపియున్నారు. [illegible] ఇందు చూపబడినది.

ఇచట లంబమును తెలిసికొనుటకు 68 భుజముయొక్క అగ్రమునుండి 40 భుజముయొక్క మొదలువరకు నుండు కర్ణము 77 కల్పింపబడినది. (ఈ కల్పించుటలో కర్ణమునకు మరియొక [illegible] భుజముయొక్క యోగము 40 + 51 = 91 కంటె పెద్దది [illegible] చిన్నదిగాని [illegible]) ఇప్పుడు చతురశ్రక్షేత్రమునందు రెండు త్రిభుజములైనవి. అందు భూమి 75 భూమిగాగల త్రిభుజముయొక్క ఇంకొక చతురశ్రములోని ఎడమభుజ 68 యున్ను కర్ణము 77న్ను భుజములు.

169వ ప్రశ్నలో లంబమును సాధింప $\frac{308}{5}$ లంబమగుచున్నది. కర్ణము భూమి. కుడివైపు భుజ 40 యును మఱియు 51 యును భుజములుగాగల త్రిభుజము కలదు. ఇది చిన్న త్రిభుజము. పెద్దత్రిభుజమునందు లంబమూలమునకు రెండుప్రక్కలను భూమి యొక్క ఆబాధలు $\frac{231}{5}$, $\frac{144}{5}$.

లంబముచే కర్ణము నెఱుంగుట.

లంబే జ్ఞాతే కర్ణజ్ఞానార్థం సూత్రం వృత్తం.

యల్లంబలంబాశ్రితబాహువర్గవిశ్లేషమూలం కథితాబధాసా।
తదూనభూవర్గ సమన్వితస్య యల్లంబవర్గస్యపదం సకర్ణః॥ ౧౯౯

అత్ర సర్వత్ర భుజౌ ౪౦ ౫౧ లంబః కిల కల్పితః $\frac{308}{5}$ అస్యాబాధా $\frac{144}{5}$ తదూనభూవర్గసమన్వితస్య లంబవర్గస్య పదం కర్ణః ౭౭

టీ॥ లంబలంబాశ్రిత బాహూర్వర్గవిశ్లేషమూలం యత్ సా అబాధా కథితా = లంబము యొక్కయు లంబముతో సంబంధించియున్న చతుర్భుజభుజము యొక్కయు వర్గముల అంతరము యొక్క మూలము ఏదికలదో అది ఆబాధ యగుచున్నది.

తదూన భూవర్గ సమన్వితస్య = ఆఆబాధచే వ్యవకలించబడిన భూమియొక్క వర్గముతో కూర్చబడిన లంబవర్గస్య = లంబవర్గము యొక్క యత్ పదం = మూలము కలదో సః = అది కర్ణః = కర్ణము.

169 ప్ర. తాంత్ర లంబమును కల్పించినచో లంబముతోటి చతుర్భుజక్షేత్రమునందలి ఏ భుజములో ఏయూగ్రము లంబాగ్రముతో కలసినదో ఆభుజ కర్ణము. ఆభుజమును లంబమునకును మధ్యనున్న భూమిఖండము (ఆబాధ) భుజ. ఇట్టిదియున్న క్షేత్రములోని బాహ్యమునందు లంబమునొక్కయు భుజయొక్కయు వర్గాంతరము కర్ణకోటివర్గాంతర మగుటచే దానియొక్క మూలము (భుజ) ఆబాధ యగుచున్నది. ఆఆబాధను భూమిలో వ్యవకలింప రెండవయాబాధ.

ఈరెండవయాబాధ భుజ. లంబము కోటి. వీటివర్గ యోగమునకు మూలము చతుర్భుజాంతర్గతత్రిభుజమునందు భుజయగు చతుర్భుజకర్ణము అగుచున్నది.

ఎట్లనగా:—పైక్షేత్రమునందు లంబము $\frac{308}{5}$ ఇదియే కల్పించబడినచో లంబ వర్గమును భుజవర్గమునుండి వ్యవకలింప $\frac{4624}{1} - \frac{94864}{25} = \frac{115600 - 94864}{25}$ $= \frac{20736}{25}$ దీనియొక్క వర్గమూలము $\frac{144}{5}$ ఇది యొక ఆబాధ.

దీనిని భూమిలో వ్యవకలింప $\frac{75}{1} - \frac{144}{5} = \frac{375 - 144}{5} = \frac{231}{5}$ ఇది రెండవయాబాధ. దీనియొక్కయు లంబముయొక్కయు వర్గముల యోగమునకు మూలము కర్ణము.

$$\left(\frac{231}{5}\right)^2 + \left(\frac{308}{5}\right)^2 = \frac{53361}{25} + \frac{94864}{25} = \frac{148225}{25}$$ దీనిమూలము $\frac{385}{5} = 77$ కర్ణము.

రెండవ కర్ణము నెఱుంగుట.

ద్వితీయకర్ణజ్ఞానార్థం సూత్రం వృత్తద్వయం.

ఇష్టోత్ర కర్ణః ప్రథమం ప్రకల్ప్య స్త్ర్యస్రే తు కర్ణోభయతః స్థితే యే।
కర్ణం తయోః క్ష్మామితరౌ చ బాహూ ప్రకల్ప్య లంబౌ చ తథాబధే చ॥
అబాధయోరేకకకుప్స్థయోర్యత్ స్యాదంతరం తత్కృతిసంయుతస్య।
లంబైక్యవర్గస్య పదం ద్వితీయః కర్ణో భవేత్సర్వచతుర్భుజేషు॥ ౨౦౦

టీ॥ అత్ర = ఇట్టి విషమచతుర్భుజమునందు, ప్రథమం = మొదట, ఇష్టః = అభీష్టమైన కర్ణః = కర్ణము, ప్రకల్ప్య = కల్పించబడి. కర్ణోభయతః = కర్ణమునకు రెండుప్రక్కలను, స్థితే త్ర్యస్రే = ఏత్రిభుజము లుకలవో, తయోః = ఆరెండుత్రిభుజములందును, కర్ణం = కల్పితకర్ణమును క్ష్మాం = భూమిగను, ఇతరౌ = తక్కినభుజములను, బాహూ చ = బాహువులు

గను, [illegible] = [illegible] లంబము [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ఆబాధలు, [illegible] అంతరం = [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

170 ప్ర. [illegible]

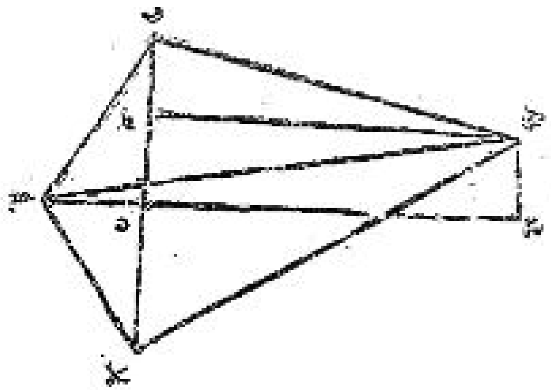
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 77 [illegible]

[illegible] భూమి 77, [illegible] భుజ 51, [illegible] లంబము 24, ఆబాధలు 32, 45 [illegible] భూమి 77 [illegible] భుజ 68 [illegible] 75 [illegible] లంబము 60 ఆబాధలు [illegible] 32 [illegible]



[illegible] భూమి [illegible] 32 [illegible] 18 [illegible] 168 [illegible] 24 [illegible] 60 [illegible] 84 [illegible] 7056 [illegible] 169 [illegible] 7056 + 169 = 7225 [illegible] 85 [illegible]

[illegible] $(కల + చఅ)^2 + (అల - అచ)^2 =$ కచ^2 [illegible]

గను, ప్రికల్ప్య = కల్పించి. లంబౌ = లంబములను, అబాధే = అబాధలను, సాధ్యౌ = సాధింపవలెను. ఏకకకుప్స్థయోః = ఒకదిక్కునందున్న అబాధయోః = అబాధలకు, యత్ అంతరం = ఏ అంతరం, ప్రాక్ = అదియే, తత్కృతిసంయుతవర్గ = అబాధాంతరవర్గముతో గూడిన, లంబైక్య వర్గస్య = లంబములయొక్క యోగముయొక్క వర్గమునకు, పదం = మూలము, సర్వత్ర చతురశ్రేషు = సమస్తచతురశ్రములందును, ద్వితీయః = రెండవదియగు, కర్ణః = కర్ణము భవేత్ = అగును.

170 ప్ర. విషమచతుర్భుజములందు రెండవకర్ణము తెలిసికొనుట.

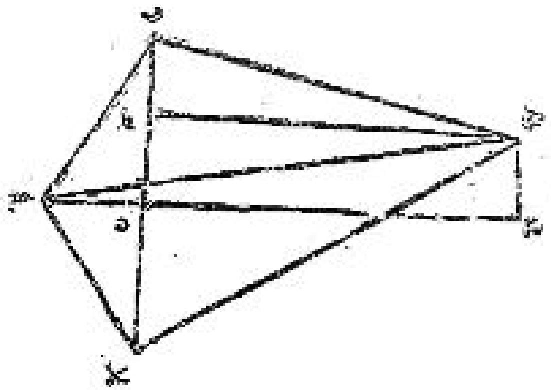
మొదట అభీష్టకర్ణమును కల్పింపవలయును. ఆకర్ణమునకు రెండుప్రక్కల రెండు త్రిభుజములు అగుచున్నవి. ఆత్రిభుజములకు కల్పితమైన కర్ణము భూమి. ఆకర్ణమునకు ఒకప్రక్క త్రిభుజమునందు చతుర్భుజములోని ముఖమున్ను, ఒకభుజయు భుజములగును. రెండవత్రిభుజమునందు భూమియు మిగిలినరెండు భుజములున్ను భుజములగును. ఇట్లు కల్పించి ఆరెండుత్రిభుజములందును పూర్వోక్తరీతిని లంబములను అబాధలను సాధింపవలెను.

ఆకర్ణమునందు క్రిందిత్రిభుజముయొక్కయు పైత్రిభుజముయొక్కయు సంబంధములగు ఒకప్రక్కనుండెడి రెండు అబాధలయొక్కయు అంతరమునకైన వర్గమును త్రిభుజముల సంబంధములైన లంబములయొక్క యోగమునకైన వర్గమునందు కలిపి ఆవర్గయోగమునకు మూలము గనుగొనవలయును. అదియే రెండవకర్ణము.

న్యాసః. తత్రైవ చతురశ్రే నవ్యభుజాగ్రాత్ ద్విష్ఠాగ్రభుజమూలాగామినః కిల కర్ణస్య మానం ౭౭ కల్పితం. తత్కర్ణరేఖావచ్ఛిన్నస్య క్షేత్రస్య మధ్యే కర్ణరేఖోభయతో యే త్ర్యస్రే ఉత్పన్నే తయోః కర్ణం భూమిం తదితరౌ చ భుజౌ ప్రకల్ప్య ప్రాగ్వల్లంబౌ చాబాధే సాధితే లంబౌ ౨౪,౬౦ అబాధే ౩౨,౪౫ అనయోరబాధయోః ఏకకకుప్స్థయోరంతరం ౧౩ లంబనిపాతాంతరమిత్యర్థః. అంతరస్య కృతిః ౧౬౯ లంబైక్య ౮౪ కృతిశ్చ ౭౦౫౬ అనయోర్యోగః ౭౨౨౫ తస్య పదం ౮౫ ద్వితీయః కర్ణః ఏవం సర్వత్ర.

పైన వ్రాసిన చతుర్భుజక్షేత్రమునందు ఏకముఖభుజయొక్క అగ్రమునుండి అనగా ముఖముయొక్కయు ఏకభుజయొక్కయు యోగమునుండి మిగిలిన భుజయొక్క మూలమువరకు (భూమి భుజల యోగమువరకును) పైన కర్ణము అగ రేఖయొక్క ప్రమాణము 77 కల్పింపబడినది.

ఆకగచ చతుర్భుజమునందు అగకర్ణముచే అకగ, అచగ రెండుత్రిభుజములైనవి. అకగ త్రిభుజమునందు అగ భూమి 77, కగభుజ40, అక భుజ 51, అందు కల లంబము 24, అబాధలు గల 32, అల 45 ఇట్లు అచగ త్రిభుజమునందు అగ భూమి 77 అచ భుజ 68 గచభుజ 75 చవ లంబము 60 అబాధలు అవ32 గవ45.



ఇందు అగ భూమియందు ఆ బిందువులకు పైన రెండు అబాధలు అల45 అవ 32 వీటి యంతరము లవ గల,గవ వీటియంతరము లవ 13 అగుచున్నది. దీనివర్గము 169 లంబములు కల 24 చవలంబము 60 వీటి యోగము 84 దీనివర్గము 7056 ఇందు వీనికి అబాధాంతరవర్గము 169 ను కలుపగ 7056 + 169 = 7225 దీనిమూలము 85 రెండవకర్ణము అవగా చక, కర్ణము అగుచున్నది.

ఉపపత్తి: క్షేత్రమునుచూచుటచే తెలియుచున్నది. స్పష్టమగుటకై ప్రా కలబడియున్నది. కల లంబము ప బిందువుపర్యంతము పెంచబడినది. అగ రేఖతో సమాంతరముగ చప రేఖ చేయబడినది. అగ రేఖయందు లంబములగుటచే కప, చవ సమాంతరరేఖ లగుచున్నవి. కావున 'పవలచ' ఆయతక్షేత్రమగుచున్నది. కావున లప = చవ ఇట్లు అగును. కపచ జాత్యమునందు కప^2 + చప^2 = కచ^2 ఇచట కప = కల + చవ ∴ (కల + చవ)^2 + (అల — అవ)^2 = కచ^2 అగుచున్నది. ఇట్లు ఈపద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది.

[illegible] లంబమును శోధించు $\frac{308}{5}$ లంబమగుచున్నది. కర్ణము భూమి. కుడిప్రక్క భుజ 40 యును మఱియు 51 యును భుజములుగాగల త్రిభుజమును గాంచుము. ఇది చిన్న త్రిభుజము. [illegible] త్రిభుజమునందు లంబమూలమునకు రెండుప్రక్కలను భూమి యొక్క ఆబాధలు $\frac{231}{5}$, $\frac{144}{5}$.

లంబముచే కర్ణము నెఱుంగుట.

లంబే జ్ఞాతే కర్ణజ్ఞానార్థం సూత్రం వృత్తం.

యల్లంబలంబాశ్రితబాహువర్గవిశ్లేషమూలం కథితాబధా సా।
తదూనభూవర్గసమన్వితస్య యల్లంబవర్గస్య పదం స కర్ణః॥ [illegible]

అత్ర సమ్యగ్భుజాత్ర లంబః కిల కల్పితః $\frac{308}{5}$ అస్యాశ్రితా ఆబాధా $\frac{144}{5}$ తదూనభూవర్గసమన్వితస్య [illegible] కర్ణః [illegible]

టీ. లంబలంబాశ్రితబాహువర్గవిశ్లేషమూలం యత్ సా ఆబాధా కథితా = లంబముయొక్కయు లంబముతో సంబంధించియున్న చతుర్భుజభుజముయొక్కయు వర్గముల అంతరముయొక్క మూలము ఏదికలదో అది ఆబాధ యగుచున్నది.

తదూనభూవర్గసమన్వితస్య = ఆ ఆబాధచే వ్యవకలించబడిన భూమియొక్క వర్గముతో గూడ్చబడిన లంబవర్గస్య = లంబవర్గముయొక్క యత్ పదం = మూలము గలదో సః = అది కర్ణః = కర్ణము.

169 ప్ర. [illegible] లంబమును కల్పించినచో అలంబముతోటి. చతుర్భుజ క్షేత్రమునందలి ఏ భుజలో ఏభాగము లంబాగ్రముతో కలసినదో ఆ భుజ కర్ణము. ఆభుజమునకు లంబమునకును మధ్యనున్న భూమియందును (ఆబాధ) భుజ. ఇట్టివగున్న క్షేత్రములోని [illegible] లంబముయొక్కయు భుజముయొక్కయు వర్గాంతరము కర్ణలో [illegible] వగుటచే దానియొక్క మూలము (భుజ) ఆబాధ యగుచున్నది. ఆ ఆబాధను భూమిలో వ్యవకలించ రెండవయాబాధ.

ఈ రెండవయాబాధ భుజ, లంబము కోటి. వీటివర్గయోగమునకు మూలము చతుర్భుజాంతర్గతత్రిభుజమువగుటు భుజయగు చతుర్భుజకర్ణము అగుచున్నది.

ఎట్లనగా:— పై క్షేత్రమునందు లంబము $\frac{308}{5}$ ఇదియే కల్పించబడినచో లంబ వర్గమును భుజవర్గమునుండి వ్యవకలించ $\frac{4624}{1} - \frac{94864}{25} = \frac{115600 - 94864}{25}$ $= \frac{20736}{25}$ దీనియొక్క వర్గమూలము $\frac{144}{5}$ ఇది యొక ఆబాధ.

దీనిని భూమిలో వ్యవకలించ $\frac{75}{1} - \frac{144}{5} = \frac{375 - 144}{5} = \frac{231}{5}$ ఇది రెండవ ఆబాధ. దీనియొక్కయు లంబముయొక్కయు వర్గముల యోగమునకు మూలము కర్ణము.

$$\left(\frac{231}{5}\right)^2 + \left(\frac{308}{5}\right)^2 = \frac{53361}{25} + \frac{94864}{25} = \frac{148225}{25}$$ దీనిమూలము $\frac{385}{5} = 77$ కర్ణము.

రెండవ కర్ణము నెఱుంగుట.

ద్వితీయకర్ణజ్ఞానార్థం సూత్రం వృత్తద్వయం.

ఇష్టాత్రకర్ణః ప్రథమం ప్రకల్ప్యః త్ర్యస్రే [illegible] భయతః స్థితే యే। [illegible]
కర్ణం [illegible] ప్రకల్ప్యలంబావబధాశ్చ సాధ్యాః॥
అబాధయోరేకకకుప్స్థయోర్యత్ స్యాదంతరం [illegible] సంయుతిస్తత్
లంబైక్యవర్గస్య పదం ద్వితీయః కర్ణో భవేత్సర్వచతుర్భుజేషు॥ [illegible]

టీ. అత్ర = ఇట్టి విషమచతుర్భుజమునందు, ప్రథమం = మొదట, ఇష్టః = అభీష్టమైన కర్ణః = కర్ణము, ప్రకల్ప్యః = కల్పింపదగినది. కర్ణోభయతః = కర్ణమునకు రెండుప్రక్కలను. [illegible] = ఏత్రిభుజము ఈరెండు కలదో, తయోః = ఆరెండుత్రిభుజములందును, కర్ణం = కల్పితకర్ణమును క్ష్మాం = భూమిగను, ఇతరౌ = తక్కినభుజములను, బాహూ = బాహువులు

గను, పరికల్ప్య = కల్పించి. లంబౌ = లంబములను, ఆబాధే = ఆబాధ లను, సాధ్యౌ = సాధింపదగినవి. ఏకకకుప్స్థయోః = ఒకదిక్కునందున్న ఆబాధయోః = ఆబాధలకు, యత్ అంతరం = ఏ అంతరం, ప్రాక్ = అనినో, తత్కృతిసంయుతవర్గ = ఆ ఆబాధాంతరవర్గముతో గూడిన, లంబైక్య వర్గస్య = లంబములయోగము యొక్క వర్గమునకు, పదం = మూలము, సర్వేషు = సమస్తచతుర్భుజములందును, ద్వితీయః = రెండవదగు, కర్ణః = కర్ణము భవేత్ = అగును.

170 ప్ర. విషమచతుర్భుజములం దొకకర్ణమునుబట్టి రెండవకర్ణము తెలియుటకు.

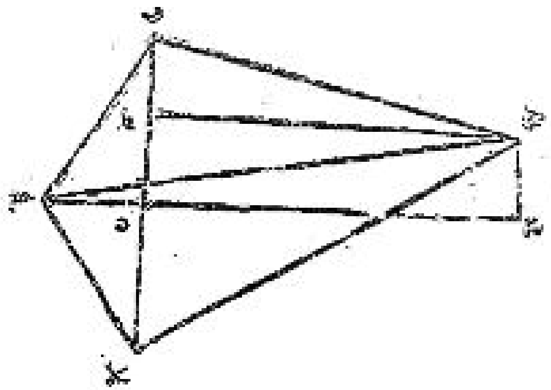
మొదట అభీష్టకర్ణమును కల్పింపవలయును. ఆకర్ణమునకు రెండువైపుల రెండు త్రిభుజము లగుచున్నవి. ఆత్రిభుజములకు కల్పితమైన కర్ణము భూమి. ఆకర్ణమునకు ఒకవైపు త్రిభుజమునందు చతుర్భుజమునందలి ముఖమును, ఒకభుజ యు భుజములగును. రెండవత్రిభుజమునందు భూమియు మరిరెండుభుజములున్న భుజలగును. ఇట్లు కల్పించి ఆరెండుత్రిభుజములందును లంబములను ఆబాధలను సాధింపవలెను

ఆకర్ణమునందు క్రిందిత్రిభుజముయొక్కయు పైత్రిభుజముయొక్కయు సంబంధములగు ఒకవైపునందలి రెండుఆబాధలయొక్కయు అంతరమునకైన వర్గమును త్రిభుజముల సంబంధములైన లంబములయొక్క యోగమువర్గ మునందు కలిపి ఆవర్గయోగమునకు మూలము గనుగొనవలయును. అదియే రెండవకర్ణము.

శ్లో. తత్రైవ చతుర్భుజే నవ్యభుజాగ్ర స్థితంగ్రాహ్యముఖం ...గామి కర్ణస్య మానం ... కల్పితం. తత్ర ... రేఖాపాతి ... క్షేత్రస్య మధ్యే కర్ణరేఖోభయతో యౌత్ర్యస్రే ఉత్పన్నే. తయోః కర్ణం భూమిం తత్తితరౌ చ భుజౌ పరికల్ప్య ప్రాగ్వల్లంబౌ ... ధాశ్చే సాధితౌ ... ఆబాధే ... అబాధయోః ... కక్కుప్స్థయోః యంతరం ... లంబనిపాతాంతర మిత్యర్థః. ... కృతిః ... లంబైక్య ... కృతిశ్చ ... సమాసో ... తస్యపదం ... ద్వితీయః కర్ణః ఏవం ...

పైన వ్రాసిన చతుర్భుజక్షేత్రమునందు ఏకముఖభుజమునొక్క అగ్రమునుండి అనగా ముఖముయొక్కయు ఏకభుజముయొక్కయు యోగమునుండి మరియొకభుజ యొక్క మూలమువరకు (భూమి భుజములయోగమువరకును) పైన కర్ణము ఆగా రేఖయొక్క పరిమాణము 77 కల్పింపబడినది.

ఆకగచ చతుర్భుజమునందు ఆగకర్ణముచే ఆకగ, ఆచగ రెండుత్రిభుజములు నైనవి. ఆకగ త్రిభుజమునందు ఆగ భూమి 77, కగభుజ 40, అక భుజ 51, అందు కల లంబము 24, ఆబాధలు గల 32, అల 45 ఇట్లు ఆచగ త్రిభుజమునందు ఆగ భూమి 77 ఆచ భుజ 68 గచభుజ 75 చవ లంబము 60 ఆబాధలు అవ32 గవ45.



ఇందు ఆగ భూమి యందు ఆ బిందువులకైన రెండు ఆబాధలు అల45 అవ 32 వీటి యంతరము లవ గల, గవ వీటియంతరము లవ 13 అగుచున్నది. దీనివర్గము 169 లంబములు కల 24 చవలంబము 60 వీటి యోగము 84 దీనివర్గము 7056 ఇందు పైచెప్పిన ఆబాధాంతరవర్గము 169 ను కలుపు 7056 + 169 = 7225 దీనిమూలము 85 రెండవకర్ణము అనగా చక, కర్ణము అగు చున్నది.

ఉపపత్తి: క్షేత్రమునుచూచుటచే తెలియుచున్నది. స్పష్టముగునట్లు ... కల లంబము వ బిందువువరకును పెంచబడినది. ఆగ రేఖతో సమాంతరముగ చవరేఖ చేయబడినది. ఆగరేఖయందు లంబములగుటచే కవ, చవ సమాంతరరేఖలగుచున్నవి. కావున 'వచవల' అయతక్షేత్రమగుచున్నది. కావున లవ = వవ అట్లు లచ = వవ. కవచ త్రికోణమునందు కవ^2 + వచ^2 = కచ^2 ఇచట కవ = కల + చవ ∴ (కల + చవ)^2 + (అల — అవ)^2 = కచ^2 అగు చున్నది. ఇట్లు ఈపద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది.

ఇ ష్ట క ర్ణ క ల్ప న ము.

ఇష్టకర్ణకల్పనే విశేషోక్తిః సూత్రం సార్ధవృత్తం.

కర్ణాశ్రితస్వల్పభుజైక్యముర్వీం ప్రకల్ప్య తచ్ఛేషమితౌ చ బాహూ। పార్శ్వే తయోర్లంబ *ఇతి ప్రాగ్వత్ కర్ణ సాధ్యౌ స్యాతాం కథం చిత్ప్రవదేత్ గణకః॥ * తదన్యలంబాన్న లఘుస్తదీయం జ్ఞాత్వేష్టకర్ణస్సుధియాప్రకల్ప్యః॥౧౫౫॥

చతుర్భుజం హ్యన్యతరాంతరకోణయో రాశ్రిత్య వంకో ద్యమానం త్రిభుజద్వయం, యథాతి. తత్ర త్రికకోణలగ్న లఘుభుజయో రైక్యం భూమి మితరౌ భుజౌ చ ప్రకల్ప్య సాధితః సచ్ఛిలంబాదూనః కర్ణద్వయం కోణే చ్ఛేదమానః కథంచిదపి వస్యాత్. తద్వితరో భూమే రధికో వస్యాత్। ఏవమూహ్యేయభూగి బుద్ధిమతా జ్ఞాయతే॥

టీ॥ కర్ణాశ్రితస్వల్పభుజైక్యం = కర్ణమునకు సంబంధించిన (ఒకటైపున నున్న) చిన్న భుజములయోగమును. ఉర్వీం = భూమిగ, ప్రకల్ప్య = కల్పించి, తచ్ఛేషమితౌ = దానికంటె మిగిలిన భుజముల కొలతలుగాను గాగల, బాహూ = భుజములన్ను, ప్రకల్ప్య = కల్పించి, అవలంబః = లంబము, సాధ్యః = సాధింపదగినది. అథ = పిమ్మట, తథా = అట్లుప్రకారము, అన్యకర్ణః = మరియొక కర్ణ మున్ను, సాధ్యః = సాధింపదగినది. తోనితః = (గ్రహించు) కర్ణము సాధ్యయోః = కల్పిత త్రిభుజభూమి (భూమిగకల్పించిన భుజైక్యము)కంటె, కథంచిత్ = ఎట్లైనను, అధికః = పొడవైనది, న = కాదు, తత్ = అకారణమువలన, తథా = అప్రకారముగ (రెండవకర్ణము) అన్యలంబాత్ = (కల్పితభూమియందు పడిన లంబ ము అన్యలంబము. దీనిబట్టి సాధించిన కర్ణము (అన్యకర్ణము) అన్యలంబమునకంటె లఘుః = చిన్నది, న = కాదు.

ఇదం = ఈవిధయమును, జ్ఞాత్వా = తెలిసికొని, సుధియా = బుద్ధిమంతుంచే ఇష్టకర్ణః = ఇష్టకర్ణము, ప్రకల్ప్యః = కల్పింపదగినది.

---

* "తదన్యకర్ణాత్" పాఠాంతరం

† "అవలంబకర్ణావూనః" పాఠాంతరము.

171. ప్ర. (1) ఇదివరలో చూపిన అకగద చతుర్భుజక్షేత్రమును చూడుము.

అగ కర్ణమునకు రెండువైపులను రెండు రెండు భుజములు గలవు. అందు చిన్న భుజములు అక, కగ, వీటియోగము ఎంతయగునో దానియొక్కయు భూమిగ కల్పింపుము అనగా అకగ కోణమునున్ను అదగ కోణమునున్ను లోపలకు అణచినచో కఅద, కగద కోణములు తొలుతటికి జరుగుచున్నవి. ఈకోణములను కలపినయెడల కర్ణ రేఖ వృద్ధిపొందును. క్రమముగ అక, కగ భుజములయోగముతో సమానమైనదగును అనగా అరెండు రేఖలును ఒక సరళరేఖగా మారుటకును అగుచున్నది. ఇప్పుడు చతుర్భుజము త్రిభుజముగా మారినది.

(2) ఈత్రిభుజమునందు భుజములయోగరూపమును పూర్వమువలెను భూమి గను తక్కిన భుజములను భుజములుగను భావించి లంబమును సాధింపుము.

రెండవకర్ణము అనగా పైపద్ధతిగనుండు ఒక కర్ణము, అట్లు సాధింపబడిన లంబమునకంటె చిన్నదిగా నేరదు.

(3) కల్పిత త్రిభుజమునందు కల్పితభూమియందు సాధింపబడినదనుటచే లంబమును అన్యలంబమని ప్రాచీనాచార్యులు వ్యవహరించిరి. అనగా ప్రథమ కర్ణము (కగరేఖ) లఘుభుజములయోగము (అక + కగ) కంటె పెద్దదిగా నేరదు. ద్వితీయకర్ణము అన్యలంబమునకంటె చిన్నదిగా నేరదు. ఈవిషయమును గమనించి ఇష్టకర్ణమును కల్పింపవలయునని చెప్పబడినది.

వివరము: పైక్షేత్రమునందు లఘుభుజములయోగము $51 + 40 = 91$ భూమి. భుజములు 68, 75 (168 ప్ర. చే) భుజములయోగము $75 + 68 = 143$ ను అంతర ము $75 - 68 = 7$ చే గుణించగ $143 \times 7 = 1001$, భూమి 91 చే భాగించగ 11 లబ్ధము. దీనిచే ఆబాధలు $\frac{91 + 11}{2} = 51$, $\frac{91 - 11}{2} = 40$ అగుచున్నవి.

ఆబాధాభుజల వర్గాంతరయోగము $68^2 - 40^2 = 4624 - 1600 = 3024$ దీనియొక్క మూలము 55 (స్వల్పాంతరముచే గ్రహింపబడెను). ఇది లంబ మగుచున్నది. రెండవకర్ణము 55 కంటె చిన్నదిగ నుండదు. మొదటికర్ణము 91 కంటె పెద్దది యుండదు. ఇందొక విశేషము గలదు. ఇప్పుడు కర్ణమునకు ఎడమవైపునందలి 68, 75 భుజములబట్టి లంబము సాధింపబడెను. కుడివైపునందు భూమియు భుజల

[illegible] (168 వ శ్లో) [illegible] (169 వ శ్లో) [illegible] (0) [illegible] (170 వ శ్లో) [illegible] 55 [illegible] 55.18 [illegible]

[illegible] 40 [illegible] 51 [illegible] 40 [illegible] 51 [illegible] 40 [illegible]

విషమ చతుర్భుజ ఫలము.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

173. వ్రి. [illegible] 77 [illegible] 24 [illegible] 77 [illegible] $\frac{77 \times 24}{2} = 77 \times 12$ = 924 ఫలము.

[illegible] 60 [illegible] 77 [illegible] $\frac{77 \times 60}{2} = 77 \times 30 = 2310$ ఫలము. [illegible] 2310 + 924 = 3234 [illegible] చతుర్భుజక్షేత్రఫలము.

[illegible]

[illegible]

సమలంబచతుర్భుజము.

[illegible]

[illegible]

భూమిం = భూమిగను, భుజౌ = భుజలను, భుజౌ = భుజములుగను, ప్రకల్ప్య = కల్పించి తస్య = ఆ క్షేత్రముయొక్క, త్ర్యస్రయోః = త్రిభుజక్షేత్రములయందలి, ఆబాధే = ఆబాధలు, సాధ్యే = సాధింపవలెను, తతః = అటుతర్వాత, లంబమితిశ్చ = లంబప్రమాణమున్ను (సాధింపవలెను). చతురస్రభూమిః = చతుర్భుజక్షేత్రసంబంధమగు భూమి ఆబాధయా = ఒక ఆబాధచే, ఊనా (కార్యా) = తీసివేయవలెను. తల్లంబవర్గైక్యపదం = అట్లు వచ్చిన భూమియొక్కయు లంబముయొక్కయు వర్గములయోగముయొక్క మూలము, శ్రుతిః = కర్ణము, స్యాత్ = అగును. సమానలంబే = సమలంబచతుర్భుజక్షేత్రమందు, లఘుదోః [illegible] లఘుభుజముయొక్కయు భూమియొక్కయు యోగమునకు [illegible] = ముఖముయొక్కయు, ఇతరభుజముయొక్కయు యోగము అల్పం = అల్పము, స్యాత్ = అగును.

178. వ్రి. (1) సమలంబ చతుర్భుజక్షేత్రమునందు లంబసాధనము.

ముఖప్రమాణమును భూప్రమాణమునందు తీసివేసి ఆ శేషమును భూమిగను భుజలను భుజలుగను కల్పించి త్రిభుజమునందువలె ఆబాధలను సాధించి వానిచే లంబమును సాధింపవలెను.

(2) చతుర్భుజక్షేత్రమునం దివ్వబడిన భూప్రమాణమునందు ఒక ఆబాధను వ్యవకలించగా శేషముయొక్కయు లంబముయొక్కయు వర్గముల యోగమునకు మూలము కర్ణమగును. అనగా క్షేత్రమునందు నిడివైన్ ఆబాధను వ్యవకలించగా శేషమునకు సాధింపబడినకర్ణము [illegible] భూమియొక్క [illegible] యగుచున్నది. [illegible] శేషమునకైన కర్ణము [illegible] అగ్రమునుండి భూమియొక్క [illegible] చున్నది.

(3) సమలంబక్షేత్రమునందు చిన్నభుజముయొక్కయు భూమియొక్కయు యోగమునకంటె ఇతరభుజముయొక్కయు ముఖముయొక్కయు యోగము అల్పమగును.

ఉదాహరణము.

ద్విపంచాశన్మితవ్యేకచత్వారింశన్మితౌ భుజౌ।
ముఖంతు పంచవింశత్యా తుల్యం షష్ట్యా మహీ కిల॥ 71॥

అతుల్యలంబకం క్షేత్ర మిదం పూర్వైరుదాహృతం।
షట్పంచాశత్ త్రిషష్టిశ్చ నియతే కర్ణయో ర్మితీ॥ 72॥

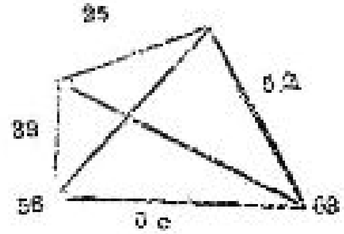
కర్ణౌ తత్రాపరౌ బ్రూహి సమలంబంచ తచ్ఛ్రుతీ॥ 73॥

తా॥ ఒక చతుర్భుజక్షేత్రమునందు ఒకభుజ52 రెండవభుజ39 ముఖము25 భూమి60 ఈ క్షేత్రమును అసమలంబక్షేత్రమని పూర్వులు ఉదహరించియున్నారు. ఆ క్షేత్రమునందు ఒక కర్ణము56 రెండవకర్ణము63. ఇట్టి క్షేత్రమునందు ఒకకర్ణమును బట్టి మరియొక కర్ణమును సాధింపుము.

లేక ఇష్టకర్ణమును పరిమితముగ కల్పించి చెప్పబడిన [illegible] మొదలగు కర్ణములను చెప్పుము.

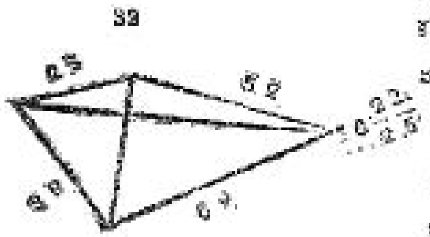
ఆ క్షేత్రమును సమలంబముగ చేసిన కర్ణములెంతెంతయుండునో చెప్పుము.

న్యాసః. అత్ర బ్రూహి కర్ణం
త్రిషష్టిమితం ప్రకల్ప్య జ్ఞాతః
ప్రాగ్వదన్యః కర్ణః॥



ఈ క్షేత్రమునందు పెద్దకర్ణము 63 తెలిసినదియనియు రెండవకర్ణము తెలియదనియు భావించి 63 కర్ణమువలన రెండవ కర్ణము సాధింపబడుచున్నది. ఈ పెద్ద కర్ణముచే రెండుత్రిభుజములైనవి. అందు పైత్రిభుజమునందు 25, 52 భుజలు, 63 భూమి. ఈ క్షేత్రమునందు ఆబాధలు 15, 48 లంబము 20 అయినవి. అట్లే క్రిందిత్రిభుజమునందు 60, 39 భుజలు. 63 భూమి. ఇందును ఆబాధలు 15, 48 అయినవి. లంబము 36 వచ్చె. ఇందు [illegible] రెండు క్షేత్రములయొక్కయు లంబములు ఒకచోటనే పడినవిధము తెలియుచున్నది. కావున రెండులంబములయొక్కయు యోగము 20 + 36 = 56 రెండవకర్ణము అగుచున్నది. ఈ ప్రకారము 56 కర్ణమువలన 63 కర్ణమున్ను తెలియగలదు. [illegible] గ్రహించవలెను. ఇట్లు అనేకవిధలంబములకు కర్ణములగల [illegible] (167 వ్రి. 2)చే ఫలము వచ్చుచున్నది.

అథ షట్పంచాశత్ స్థానే ద్వాత్రింశన్మితం ౩౨ కర్ణం ప్రకల్ప్య ప్రాగ్వత్తాన్యన్యమానే కర్ణే న్యాసః. జాతంకరణీఖండద్వయం ౬౨౧, ౨౭౦౦ అనయోర్మూలే ఆసన్నే ౨౪ ౨౧/౨౫, ౫౧ ౨౪/౨౫ ఐక్యం ౭౬ ౨౨/౨౫ ద్వితీయః కర్ణః.



పూర్వక్షేత్రమందలి భుజములగలిగి 56 కర్ణమునకు 32 కర్ణముగనో! రెండవకర్ణము నెరుంగుట.

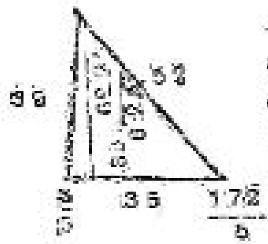
అక్కర్ణమునకు రెండుప్రక్కల రెండు త్రిభుజములు ఏర్పడుచున్నవి. ఒకత్రిభుజమునందు 39, 25 భుజలు 32 భూమి. ఆబాధలు 30, 2 లంబము $\sqrt{621}$

ఇట్లు రెండవత్రిభుజమునందు 60, 52 భుజలు 32 భూమియును నగుచున్నవి. ఇందును 30, 2 ఆబాధ లగుచున్నవి. ఇందును లంబము $\sqrt{2700}$ అగుచున్నది. ఇచటను ఒకవైపునవైన ఆబాధాలంబాంతరము సాన్నముకనుకొనుటచే లంబయోగమే కర్ణమగును. కావున లంబవర్గముల ఆసన్నమూలములయోగముకర్ణమగుచున్నది.

$\therefore \sqrt{621} + \sqrt{2700} = 24\frac{21}{25} + 51\frac{24}{25} = 76\frac{22}{25}$ కర్ణము.

అథ తదేవ క్షేత్రం చేత్సమలంబం (లంబానయనం)

తదా ముఖోనభూమిం పరికల్ప్య భూమి మితి లంబాదిజ్ఞానార్థం త్ర్యస్రం కల్పితం. అత్రాబాధే జాతే ౩/౫, ౧౭౨/౫. లంబశ్చ కరణీగతో జాతః ౩౮౦౧౬/౨౫ ఆసన్నమూలకరణేన ౩౮ ౬౨౨/౬౨౫ జాతః. అయం తత్ర చతుర్భుజే సమలంబః.

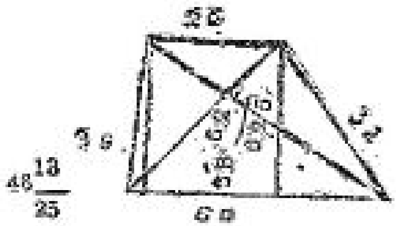


పైన చెప్పబడిన భుజములగల క్షేత్రము సమలంబచతుర్భుజక్షేత్ర మగునో. పైపద్ధతిచే భూమి 60 వలన ముఖము 25ను వ్యవకలించ 35 శేషము భూమిగను తక్కినభుజలు 39, 52లను భుజలుగ గల్పించి త్రిభుజమును చూపవలెనట. ఇందు (163 శ్లో. చే) ఆబాధలు $\frac{3}{5}$, $\frac{172}{5}$ అగుచున్నవి. తదుపరి భుజవర్గములవలన ఆబాధావర్గములనువ్యవకలించి లంబవర్గము $\frac{38016}{25}$ దీనియొక్క ఆసన్న మూలము. $38\frac{622}{625}$ ఇది త్రిభుజక్షేత్రమునందు లంబమగుచున్నది. ఇదియే ఆచతుర్భుజమునందును సమలంబరేఖ యగుచున్నది.

సమలంబవశాత్కర్ణానయనం

లఘ్వాబాధోనితభూమేః సమలంబస్య చ వర్గయోగః ౫౦౪౯ అయం కర్ణవర్గః. ఏవం బృహదాబాధాతో ద్వితీయకర్ణవర్గః ౨౧౭౬ అనయోరాసన్నమూలకరణేన జాతౌ కర్ణౌ ౭౧ ౧/౨౦, ౪౬ ౧౩/౨౫ ఏవం చతురస్రే తేష్వేవ బాహుష్వన్యౌ కర్ణౌ భవతః.

—• సమలంబమువలన కర్ణమును కనుగొనుట. •—

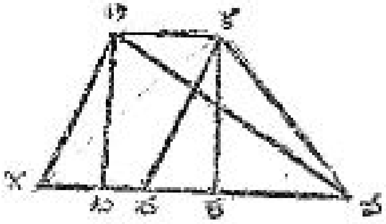


చిన్న ఆబాధ $\frac{3}{5}$ దీనిని చతుర్భుజమందలి భూమి 60 వలన వ్యవకలించ $\frac{297}{5}$ దీనియొక్కయు సమలంబము $38\frac{622}{625}$ యొక్కయు వర్గముల యోగము 5049 దీనియొక్క ఆసన్నమూలము, $71\frac{1}{20}$ పెద్దకర్ణ మగుచున్నది.

ఇట్లు పెద్దలంబాబాధను భూమినుండి వ్యవకలించిన $\frac{128}{5}$, దీనియొక్కయు సమలంబ ముయొక్కయు వర్గములయోగము 2178 దీనిమూలము చిన్నకర్ణ మగుచున్నది.

ఇట్లు చతుర్భుజక్షేత్రమునందు అభుజలయందే బహువిధములగు కర్ణము లగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: విషమలంబక్షేత్రమునందు లంబ కర్ణముల తెలియుటకుసూత్రము:



'అగచక' సమానలంబ చతుర్భుజము నందు, కచ సమానలంబమును [illegible] రేఖ, ఈచతుర్భుజమునందు అగ సమాంతరముగను కచరేఖ చేయబడెను. అక రేఖయు గచరేఖయు సమాంతరరేఖలై యున్నవి. కావున అగచక సమాంతర చతుర్భుజ మగుచున్నది. ∴ అక = గచ.

(రే 1 అ. 34 ప్ర.) ఇట్లు అగ = కచ కావున చప = (గజ — గప) — (గప — అక) కచప త్రిభుజమునందు కచతో సమానముగు అగ రేఖభుజగను. చపతో సమానముగు (గప — అక) ఒ [illegible] భూమిగను కల్పించి కలెలంబము సాధింపబడెను. అందు చట చిన్న ఆబాధ తట పెద్దయాబాధ. కావున లఘ్వాబాధోనితభూమి గప — గట = టప ఇది భుజ, అట కోటి, వీటి వర్గయోగము అప కర్ణముయొక్క వర్గ మగుచున్నది. అట్లు గజ — తజ = గత భుజయొక్కయు కత కోటియొక్కయు వర్గములయోగము కగ (క బిందువునుండి గ బిందువునకు చేయబడురేఖ) కర్ణ వర్గ మగుచున్నది. ఇట్లు పద్ధతియంతయు ఉపపన్న మగుచున్నది.

కర్ణానయనమున బ్రహ్మగుప్తాదుల పద్ధతి.

ఏవమనియతత్వేపి నియతావేవకర్ణా వానీతౌ బ్రహ్మగుప్తాద్యై
స్తదానయనం యథా.

కర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యముభయథాన్యోన్యభాజితంగుణయేత్।
యోగేన భుజప్రతిభుజవధయోః కర్ణౌ పదే విషమే॥ [illegible]॥

టీ॥ సర్వత్ర = సంబంధద్రవ్యములగను, అన్యోన్యభాజితం — అన్యోన్యము చే భాగింపబడిన, కర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యం = కర్ణమును సంబంధించిన భుజల యొక్క గుణనఫలయోగమును, భుజప్రతిభుజవధయోః = సమ్ముఖభుజల గుణన ఫలముయొక్క, యోగేన = యోగముచే, గుణయేత్ = గుణింపవలెను. పదే = ఆగుణనఫలములమూలములు, విషమే = విషమచతుర్భుజమునందు, కర్ణౌ = కర్ణములు.

174. ప్ర. (1) చతుర్భుజమునందు ఒకటి ప్రథమకర్ణము. రెండవది ద్వితీయకర్ణము. అనుకొందము. ప్రథమకర్ణముగని రెండుప్రక్కలను రెండు రెండు భుజ లుండును. ప్రథమకర్ణముయొక్క ఒకప్రక్కనున్న భుజలలో నొకభుజ చే రెండవ భుజను గుణింపుము. ఇట్లు రెండవప్రక్కనున్న భుజలలోనున్న ఒకదానిచే రెం డవదానిని గుణింపుము. ఈరెండుగుణనఫలములను కలుపుము. ఇదిప్రథమకర్ణమును సంబంధించిన భుజఘాతైక్యము.

(2) అట్లు ద్వితీయకర్ణమునకును రెండుప్రక్కలనుండు వేరువేరు భుజఘాతములను గుణించి ఆభుజఘాతములను ప్రక్కనుంచు చేయుము. ఇది ద్వితీయకర్ణమును సంబంధించిన భుజఘాతైక్యము.

(3) ప్రథమకర్ణముయొక్క భుజఘాతైక్యమును ద్వితీయకర్ణముయొక్క భుజఘాతైక్యముచే భాగింపుము. ద్వితీయకర్ణమునయొక్క భుజఘాతైక్యమును ప్రథమకర్ణముయొక్క భుజఘాతైక్యముచే భాగింపుము.

(4) పిమ్మట సమ్ముఖభుజలను గుణించి అనగా భూమిని ముఖముచే గుణించి చతుర్భుజక్షేత్రసంబంధములగు భుజలలో నొకదానిని మరియొకదానిచే గుణించి రెండుగుణనఫలములను కలుపుము. ఇది భుజప్రతిభుజవధయోగము. దీనిచే పూర్వము భాగించగా వైన సంఖ్యలను గుణింపుము.

(5) అట్లు భాగించి గుణింపగావచ్చు సంఖ్యలయొక్క వర్గమూలములు విషమచతుర్భుజమునందు కర్ణము లగును.

(6) విషమచతుర్భుజముయొక్క 4 భుజలలోను పెద్దభుజ భూమి. చిన్నభుజ ముఖము. తక్కినవి బాహువులు (భుజలు) ఇట్లు వ్యవహరింపుము.

న్యాసః. (వెనుకటియుదాహరణశ్లోకమునకు.) కర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యే కహా
మనయో:39, కొర్ణాశ్రితే:52, తథా 25,39, ఉంభయయోర్ఘాతైక్యే [illegible]

ఘాతయో ర్ద్వయో రైక్యం ౪౦౯౫ తథా ద్వితీయవారం ౨౫,౫౨ అనయోర్ఘాతే జాతం ౧౩౦౦ తథా ౬౦,౩౯ అనయోర్ఘాతే జాతం ౨౩౪౦ ఘాతయోర్ద్వయోరైక్యం ౩౬౪౦ ఏతదైక్యం; భుజప్రతిభుజయోః ౫౨, ౩౯ ఘాతః ౨౦౨౮ పశ్చాత్ ౬౦,౨౫ అనయో ర్వధః ౧౫౦౦ తయోరైక్యం ౩౫౨౮ అనేన గుణితం జాతం ౧౪౪౪౭౧౬౦ ప్రథమకర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యేన ౪౦౯౫ భక్తం లబ్ధం ౩౯౬౯ అస్యమూలం ౬౩ ఏకః కర్ణః. తథా ద్వితీయకర్ణాధః ప్రథమకర్ణాశ్రిత భుజఘాతైక్యం ౪౦౯౫ భుజ ప్రతిభుజవధయోగ గుణితం జాతం ౧౪౯౦౫౮౦౦ అన్యకర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యేన ౩౫౨౮ భక్తం లబ్ధం ౪౨౨౫ అస్యమూలం ౬౫ ద్వితీయః కర్ణః॥

ఉదా: ముఖము = 25, భూమి = 60, భుజలు 52, 39 (85 ఉదా. శ్లో. చూ) క్రింద ఉపపత్తిగా చూపబడిన వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజమునందు క = భూమి, భు = ముఖము, అ = భుజ (1), గ = భుజ (2), చ = ప్రథమ, ద = ద్వితీయ (అ × భు) + (క × గ) = ప్రథమకర్ణాశ్రిత భుజఘాతైక్యము. అట్లు (అ × క) + (గ × భు) = ద్వితీయకర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యము. క.భు + అ.గ = భుజప్రతిభుజఘాతయోగము. క = 60, భు = 25, అ = 39, గ = 52 అనగా ప్రథమ

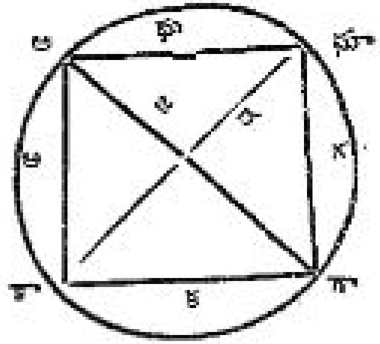
ప్రథమకర్ణము—

$$\frac{\{(అ \times భు) + (క \times గ)\} \times \{(క \times భు) + (అ \times గ)\}}{(అ \times క) + (గ \times భు)}$$

$$= \frac{\{(39 \times 25) + (60 \times 52)\}\ (60 \times 25 + 39 \times 52)}{(60 \times 39) + (25 \times 52)}$$

$$\frac{(975+3120) \times (2028+1500)}{\ldots} = \frac{4095 \times 3528}{\ldots} = 3969$$

ఉపపత్తి: సరళ త్రికోణమితి చే: (185 వ. ఉపపత్తి 4, 5 చూ.)



$$\text{కోజ్యా}\ అ = \frac{అ^2 + భు^2 - చ^2}{2\,అ.భు}$$

$$\text{కోజ్యా}\ గా = \frac{క^2 + గ^2 - చ^2}{2\,క.గ}$$

$$\therefore చ^2 = క^2 + గ^2 - 2క.గ.\text{కోజ్యా}\ గా$$

$$= అ^2 + భు^2 - 2అ.భు.\ \text{కోజ్యా}\ అ$$

$$\because \text{కోజ్యా}\ అ = \text{కోజ్యా}(180 - గా)$$

$$= -\text{కోజ్యా}\ గా$$

$$\therefore చ^2 = అ^2 + భు^2 - 2అభు.\ \text{కోజ్యా}\ అ = క^2 + గ^2 + 2క.గ.\ \text{కోజ్యా}\ అ$$

$$\therefore \text{కోజ్యా}\ అ = \frac{అ^2 + భు^2 - క^2 - గ^2}{2\,(అ.భు + క.గ)}$$

$$\therefore చ^2 = అ^2 + భు^2 - 2\,అ.\,భు.\ \left\{\frac{అ^2 + భు^2 - క^2 - గ^2}{2(అ.భు + క.గ)}\right\}$$

$$= \frac{(అ^2 + భు^2) \times (అ.భు + క.గ) - అ.భు(అ^2 + భు^2 - క^2 - గ^2)}{అభు + కగ}$$

$$= \frac{అ^3భు + అభు^3 + అ^2క.గ + భు^2కగ - అ^3భు - అభు^3 + అభుక^2 + అభుగ^2}{అభు + కగ}$$

$$= \frac{అ^2.కగ + భు^2కగ + అభుక^2 + అభుగ^2}{అభు + కగ}$$

$$= \frac{(అ.క)(అ.గ) + (క.భు)(గ.భు) + (అ.క)(క.భు) + (అ.గ)(గ.భు)}{అ.భు + క.గ}$$

$$\frac{అక(అగ + కభు) + గభు(అగ + కభు)}{\ldots} = \frac{(అక + గభు)(అగ + కభు)}{\ldots}$$

$\because$ కోజ్యా కా = కోజ్యా (180 — ఘా) = — కోజ్యా ఘా

$\therefore$ జ² = అ² + క² — 2 అక కోజ్యా కా = గ² + ఘ² + 2గఘ కోజ్యా కా

$\therefore$ కోజ్యా కా = $\dfrac{\text{అ}^2 + \text{క}^2 - \text{గ}^2 - \text{ఘ}^2}{2\,(\text{అక} + \text{గఘ})}$

$\therefore$ జ² = అ² + క² — 2అక × $\left(\dfrac{\text{అ}^2 + \text{క}^2 - \text{గ}^2 - \text{ఘ}^2}{2\,(\text{అక} + \text{గఘ})}\right)$

$= \dfrac{(\text{అ}^2 + \text{క}^2) \times (\text{అక} + \text{గఘ}) - \text{అక}(\text{అ}^2 + \text{క}^2 - \text{గ}^2 - \text{ఘ}^2)}{\text{అక} + \text{గఘ}}$

$= \dfrac{\text{అ}^2\text{గఘ} + \text{క}^2\text{గఘ} + \text{అకగ}^2 + \text{అకఘ}^2}{\text{అక} + \text{గఘ}} = \dfrac{(\text{అగ} + \text{కఘ})\,(\text{కగ} + \text{అఘ})}{\text{అక} + \text{గఘ}} = \text{జ}^2$

త్రైగణితమునందు కోణస్థానమునందలి ఈ వర్గ జ వర్గములు రెండింటియందును అక + గఘ గుణకారము లేకున్నది. ఇది భుజప్రతిభుజసంయోగము మగుచున్నది. అక + గఘ ఇది ఈవర్గమునందు భాజ్యమున్ను జ వర్గమునందు భాజకమున్ను అగుచు అఘ + కగ ఇది ఈవర్గమునందు భాజకముగను జవర్గమునందు భాజ్యముగను ఉన్నది. ఇది ఆయాకర్ణములను సంబంధించిన భుజప్రతిభుజముల యోగము లగుచున్నవి. ఇట్లు సూత్రము మొదలున్న యగుచున్నది. దీనిచే కర్ణానయనము వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజములను సంబంధించినది యనియు స్పష్టమగుచున్నది. ఈపద్ధతి గుణనభజనాదులచే విశేషక్రియకర మగుచున్నది.

అస్యకర్ణానయనస్య ప్రక్రియాగౌరవం లఘుప్రక్రియా కథ్యతే ।
అభీష్టజాత్యద్వయబాహుకోటయః పరస్పరంకర్ణహతా భుజా ఇతి।
చతుర్భుజం యద్విషమం ప్రకల్పితం శ్రుతీతు తత్ర త్రిభుజద్వయాత్తతః॥
బాహ్వోర్వధః కోటివధేన యుక్ స్యాదేకా శ్రుతిః కోటిభుజావధైక్యం।
అన్యా లఘౌ సత్యపి సాధనేఽస్మిన్ పూర్వైః కృతం యద్గురు తన్న విద్మః॥

టీ॥ అభీష్ట జాత్యద్వయ బాహుకోటయః = అభీష్టములగు రెండుజాత్యముల యందలి భుజకోటులు, పరస్పరం = అన్యోన్యము, కర్ణహతాః = కర్ణములచే గుణింపబడినవై. భుజాః = చతుర్భుజక్షేత్రభుజలు (అగును) ఇతి = ఇట్లు, యత్ = ఏ విషమం = విషమమగు, చతుర్భుజం = చతుర్భుజక్షేత్రము, ప్రకల్పితం = కల్పింప

బడినదో, తత్ర = ఆచతుర్భుజక్షేత్రమునందు, శ్రుతీతు = కర్ణములన్న, తతః = ఆ, త్రిభుజద్వయాత్ = జాత్యత్రిభుజద్వయమువలనను (అగుచున్నవి) బాహ్వోర్వధః = భుజలయొక్క గుణనము, కోటివధేన = కోటులయొక్క గుణనముతో, యుక్ = కూడినదై, ఏకా శ్రుతిః స్యాత్ = ఒక కర్ణము అగును. కోటిభుజావధైక్యం = కోటిని భుజచే గుణించగా గుణనఫలముల యోగము, అన్యా శ్రుతిః = రెండవకర్ణము. అస్మిన్ = ఈ, లఘౌ = సులభమైన, సాధనే = సాధనము, సత్యపి = ఉన్నను, పూర్వైః = పూర్వులగు ప్రాచీనగణితజ్ఞులచే గురు = క్లిష్టమగుపద్ధతి, యత్ = ఏకారణముచే, కృతం = చేయబడిన దియో (తత్ = ఆకారణమును) న విద్మః = ఎరుంగము.

జాత్యద్వయకోటిభుజాః పరస్పరం శ్రుతిహతాః భుజాః విషమే।
అధరే శ్రుతి కృత్వా మాహోః బాహూ విపర్యయం భుజాన్యాస్థిత్రమావ్యమిత్యుక్తమ్.

175. ప్ర. పూర్వోక్తపద్ధతికంటె సులభమగు కర్ణానయనపద్ధతి.

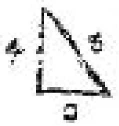
(1) ఇష్టములగు రెండుజాత్యములను కల్పించి (153, 154, 155 చూ) మొదటిజాత్యముయొక్క కర్ణముచే ద్వితీయజాత్యముయొక్క భుజకోటులను వేర్వేరుగ గుణింపుము. ద్వితీయజాత్యకర్ణముచే ప్రథమజాత్యముయొక్క భుజకోటులను వేర్వేరుగ గుణింపుము. ఈ 4 గుణనఫలములున్ను విషమచతుర్భుజమునందలి 4 భుజ లగుచున్నవి. అందు పెద్దసంఖ్య భూమి. చిన్నసంఖ్య ముఖము. తక్కినవి భుజలు.

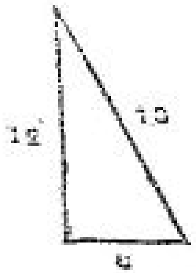
(2) ఇట్టి విషమచతుర్భుజమునందు ప్రథమజాత్యభుజను ద్వితీయజాత్య భుజచే గుణింపుము. ప్రథమజాత్యకోటిని ద్వితీయజాత్యకోటిచే గుణింపుము. ఈగుణనఫలముల యోగము ఒకకర్ణము. ప్రథమజాత్యభుజను ద్వితీయజాత్యకోటిచే గుణింపుము. ప్రథమజాత్యకోటిని ద్వితీయజాత్యభుజచే గుణింపుము. ఇవి రెండవకర్ణము.

(3) ఇచట నీవిషయము గమనింపదగియున్నది. విషమచతుర్భుజక్షేత్రము నందలి రెండు రెండుభుజలను ఒకేసంఖ్యచే వేర్వేరుగ భాగహరింపుము. అట్టి వర్తింప, ఆయాగ్ర సంఖ్యలు కర్ణములుగను ఆరెండురెండు అవశిష్ట సంఖ్యలు

భిన్న భిన్న జాత్యములందు భుజకోటులుగనున్న రెండు జాత్యములను వానివలన చతుర్భుజము ఈపద్ధతికి నిపుణత సాధుచున్నది.

(4) అట్లు జాత్యద్వయముచేతను విషమచతుర్భుజమునందు కర్ణములు సాధించుటకొరకే బ్రహ్మగుప్తాదులు బరాంతప్రయోజనకరమగు పద్ధతిని చెప్పియున్నారు.



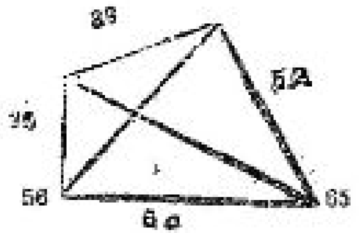


న్యాసః. ఏతయో రిత్థ కల్పిత కర్ణ జాత్యౌ భుజకోటయః ఇతి క్షేత్ర భుజాః ౩౯, ౨౫, ౬౦, ౫౨ ఆసాం మహతీ భూ ర్లఘుర్ముఖం ఇతరౌ బాహూ ఇతి ప్రకల్ప్య క్షేత్రం, దర్శితం తతిత్ర కర్ణౌ మహా ఇత్యాదినా సాధితౌ ౬౩, ౫౬. తత్రైవ జాత్యద్వయస్య ఇతరేతర భుజకోటిఘాతౌ ౩౬, ౨౦ అనయో రైక్య మేకః కర్ణః ౫౬. బాహ్వో ౩, ౪ కోట్యోర్వధ ౬౦, ౫ ఘాతౌ ౬౩, ౪౮ అనయో రైక్యం మన్యః కర్ణః ౬౩ ఏవం క్షేత్ర స్యాతాం. ఏవం సుఖేన జాయేతే.

పూర్వోక్తము ఉదాహరింపబడిన క్షేత్రమునందు భూమి 60 ముఖము 25 భుజలు 52, 39 ఇందు 60, 25 ఈసంఖ్యలకు అపవర్తనాంకము 5, ఇది ఒకజాత్యముయొక్క కర్ణము. అపవర్తితసంఖ్యలు 12, 5 ఇవి రెండవజాత్యమునకు కోటిభుజలు. ఇట్లు 52, 39 ఈసంఖ్యలకు 13 అపవర్తనాంకము ఇది రెండవజాత్యమునకు కర్ణము, అపవర్తితసంఖ్యలు 4, 3 ఇవి మొదటిజాత్యమునకు కోటిభుజలు. ఈరెండు జాత్యములను హెచ్చింపబడినవి. 5 × 12 = భూమి 5 × 5 ముఖము. 13 × 4 = భుజ 13 × 3 = భుజ. ఇట్లు ఇదివరలో చూపిన బ్రహ్మగుప్తవాక్యము ననుసరించి పెద్ద సంఖ్య భుజ, చిన్నసంఖ్య ముఖము. తక్కినవి భుజలు. ఇట్లు విషమచతుర్భుజ మైనది.

ఇందు రెండుజాత్యములయొక్క భుజలగుణనము 12 × 4 = 48 కోటుల గుణనము 5 × 3 = 15 రెండిటియోగము 48 + 15 = 63 ఒకకర్ణము. ఒకజాత్యముయొక్క కోటిని రెండవ జాత్యముయొక్క భుజచే గుణింప 12 × 3 = 36. ఇట్లు 5 × 4 = 20 రెండిటియోగము 36 + 20 = 56 ఇది రెండవకర్ణము. ఇట్లు ముఖ్యముగ నిర్ణయింపు కర్ణములను బ్రహ్మగుప్తాదుల యుక్తియనుచే సాధించిరని భాస్కరాచార్యులవారు చెప్పుచున్నారు.

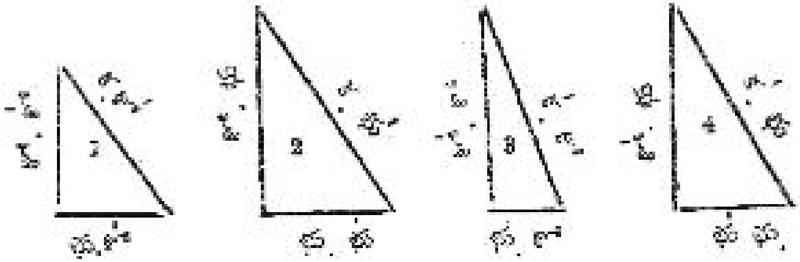
న్యాసః. అథ యది పార్శ్వయోః భుజయోః వ్యత్యయం కృత్వా న్యస్తం క్షేత్రం, తదా జాత్యద్వయోః కర్ణయోః వధః ౬౫ ద్వితీయః కర్ణః.



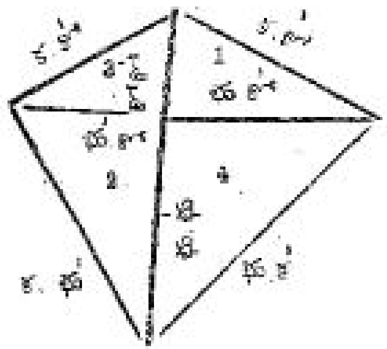
ఒకకర్ణమునకు ఒకవైపునున్న భుజలను వ్యత్యయముగా మార్చినచో అనగా 25 భుజగను, 39 ముఖముగను క్షేత్రము మార్చినచో మొదటినిర్ణయించిన రెండు జాత్యములయొక్క కర్ణములయొక్క గుణనము 13 × 5 = 65 రెండవకర్ణము గుచున్నది. ప్రథమకర్ణము 63గనే యున్నది.

ఉపపత్తి: ఒకజాత్యమునందలి భుజకోటికర్ణములను 3 టిని ఒకేసంఖ్యచే గుణించగా నైన సంఖ్యలు, క్రమముగ భుజకోటికర్ణములుగా గల మరియొక జాత్యము మొదటిజాత్యమునకు సజాతీయమై యగుచున్నది. (పే 6 అ. పరి) కావున మొదటిజాత్యమునందలి కో, భు, క. ద్వితీయజాత్యమునందలి కో', భు', క'. ప్రథమజాత్యకోటిభుజకర్ణములను ద్వితీయజాత్యమందలి కో', భు' చేత వేర్వేరు గుణించ రెండుజాత్యములు అగుచున్నవి. ఇవి ప్రథమజాత్య సజాతీయములు. ద్వితీయజాత్యమునందలి కో', భు', క', వీటిని ప్రథమజాత్యమునందలి కో, భు వీటిచే వేర్వేరుగుణించ రెండుజాత్యములు ద్వితీయజాత్య సజాతీయములగుచున్నవి.

ఆ త్ర్యశ్రములు మాఱకున్నవి.



ఇందు 1, 3 లలో కోటులు, 2, 4 లలో భుజలు 2, 3 లలో కోటిభుజలు 1, 4 లలోని భుజకోటులు సమము అగుటచే నాలుగు త్ర్యశ్రములును ఈ మాదిరిగ ఆ కోటిభుజలు లోపల కలియునట్లును నాలిగిటియొక్క కర్ణములు బయటనుండునట్లు భుజలనునట్లుగ ఒకచో నుంచగా కోటి విషమచతుర్భుజక్షేత్రమగుచున్నది.



ఇందు 1 క్షేత్రముయొక్క కోటియు 4 క్షేత్రముయొక్క భుజయును ఒకరేఖ యైనవి. ఇది యొకకర్ణము (శ్లో 14. చూ) అట్లు 3 క్షేత్రముయొక్కయు 2 క్షేత్రము యొక్కయు కోటిభుజల యోగమున్న ఒకరేఖ యగుచున్నవి. అట్లు 1 క్షేత్రము యొక్క భుజయును 2 క్షేత్రముయొక్క భుజయును కలిసి ఒకకర్ణరేఖ యైనవి. అట్లు 3 క్షేత్రముయొక్క కోటియును 4 క్షేత్రముయొక్క కోటియున్ను ఒకరేఖగనే కలియుచున్నవి. ఇందు కోణవిషయము స్పష్టముగ గన్పట్టుచున్నది. ఈ చతుర్భుజభుజలు, ఆయాకర్ణకోటి ఘాతములును కర్ణభుజఘాతములును నైయున్నవి. దీనిని బాగుగ చూచుటచే సూత్రోపపత్తి స్పష్టమగును.

ఇదివరలో ప్రథమ త్ర్యశ్ర భుజకోటికర్ణములను ద్వితీయ త్ర్యశ్ర భుజకోటులు చేతను ద్వితీయ త్ర్యశ్ర భుజకోటికర్ణములను ప్రథమ త్ర్యశ్ర భుజకోటులచేతను

గుణించగా నగు 4 క్షేత్రములయొక్కయు యోగము సమానమైన చతుర్భుజము పొంద బడినది.

అట్లు ప్రథమత్ర్యశ్రభుజకోటికర్ణములను ద్వితీయత్ర్యశ్రకర్ణముచేతను ద్వితీయ త్ర్యశ్రభుజకోటికర్ణములను ప్రథమత్ర్యశ్ర కర్ణముచేతను గుణింప రెండు త్ర్యశ్రములు కలుగుచున్నవి. అట్టి రెండు త్ర్యశ్రములును రెండింటియొక్క కర్ణములును కలియు నట్లు ఉంచినచో ఒకచతుర్భుజము గాగలదు. [illegible] నిలువుగ గల కర్ణముగలదు. దానికి [illegible] గన్పట్టుచున్నది. అట్లు [illegible] ఆ క్షేత్రమందును నాలుగు భుజ లున్న [illegible] కర్ణకోటి కర్ణఘాత ఘాతములే యగుచు న్నవి. ఒకకర్ణము మాత్రము [illegible] కర్ణఘాతముగ నగుచున్నది. కాని పరికించినచో ఈ క్షేత్రమందలి 1, 2 క్షేత్రము [illegible] 3, 4 క్షేత్రములో [illegible] ఆ క్షేత్రములందు నిలువుగానైన కర్ణములను [illegible] స్పష్టమగుచున్నది. దానిచే ఒక [illegible] భుజలను మార్పు గన్పట్టుచున్నది.

కావున ఒక [illegible] భుజలను మార్చి క్షేత్రము నుంచినచో అభీష్ట త్ర్యశ్రద్వ యముయొక్కయు కర్ణఘాతము అదిచతుర్భుజమునకు ఒకకర్ణమగునని చెప్పబడినది. తదితరకర్ణము, ఈ క్షేత్రమందలి కర్ణమే యగును. మొదట గుణింపగానైన 4 త్ర్యశ్ర ములయొక్కయు కర్ణములను [illegible] (త్ర్యశ్రద్వయముచే నైనవి) అందలి భుజలను సమములగుటచే ఆ క్షేత్రములను [illegible] చతుర్భుజమునందు నాటికర్ణములు, సమానులగు నిందలి భుజలనైయుండునట్లుంచినచో అష్టముగానైన కర్ణము అదియే యగునట్టిదని ఇందు స్పష్టముగ గన్పట్టుచున్నది. ఇట్టి పద్ధతి యందలియు నుండున్న యగుచున్నది.

ఆయా భుజకోటికర్ణత్రిగుణములుగల త్ర్యశ్రములైన అట్టుమొక్కటిని కత్తిరించి ఉంచి చూచినచో కలియుటయు స్పష్టముగ గోచరించును.

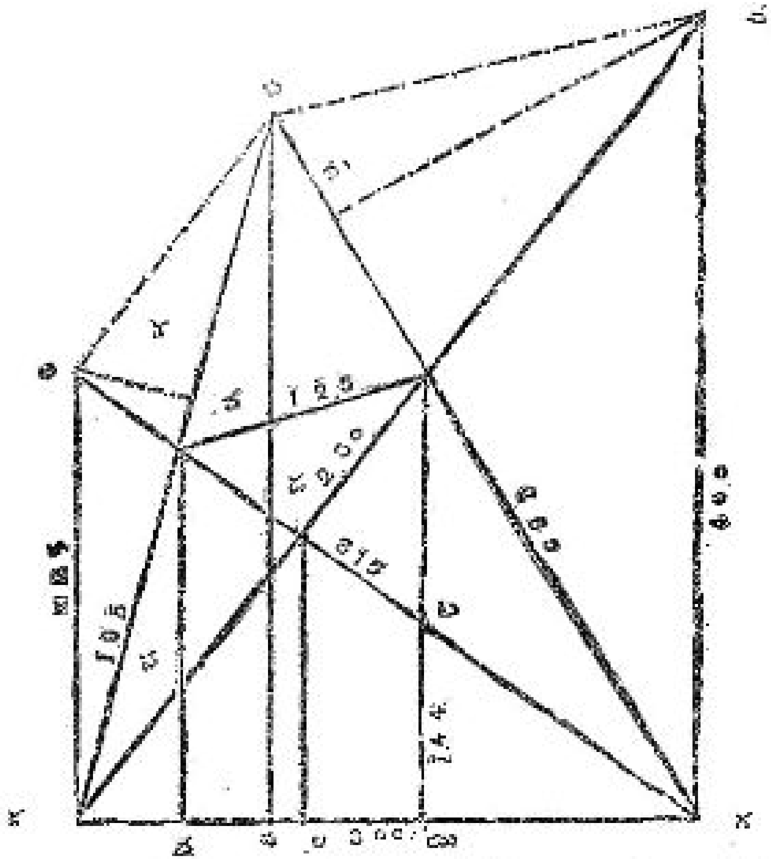
అథ సూచీక్షేత్రోదాహరణమ్.

క్షేత్రే యత్ర శతత్రయం (౩౦౦) క్షితిమితి స్త్వేందుతుల్యం ముఖం (౧౨౫)। బాహూ ఖర్తుకృతిభి (౨౬౦) శ్శరాంకధృతిభి (౧౯౫) ప్రోక్తౌ చ తత్ర శ్రుతీ॥ ఏకా ఖాష్టయుగై (౨౮౦) స్సమా తిథిగుణై (౩౧౫) రన్యాథ తల్లంబకౌ। నందాష్ట్యా గోధృతిభి (౧౮౯) స్తత్త్వాబ్ధియుగ్మై (౨౨౪) ర్మితౌ॥
తత్సంధౌ కథ యోఽధరే శ్రవణయో ర్యోగాచ్చ లంబౌ తథా
సూచ్యాదీ నిజమార్గవృద్ధభుజయో ర్యోగేన యా స్యాత్ తతః॥
సాబాధం పదలంబకం చ భుజయో స్సూచ్యాశ్రయే ప్రమాణే చ కే
సర్వం గణితజ్ఞ ప్రచక్ష్వ నితరాం క్షేత్రేత్ర దక్షోఽసి చేత్॥ ౧౧౦

తా॥ ఒక క్షేత్రమునందు భూమి 300 ముఖము 125 ఒకభుజ 260 రెండవ భుజ 195 ఒక కర్ణము 280 రెండవకర్ణము 315 ఒకలంబము 189 రెండవలంబము 224 ఆ క్షేత్రమునందు కర్ణలంబములయోగమునుండి క్రింది ఖండములను కర్ణములయోగమునుండి లంబమును ఆబాధలను ఆ క్షేత్రముయొక్క భుజలు స్వమార్గమున వృద్ధిపొందుటచే ఆరెండుభుజలును సూచ్యాకారముగ కలసిన ప్రదేశమునుండి భూమియందు లంబమును ఆబాధలను చెప్పుము. అట్లే ముఖముయొక్క పైభాగమున నైన సూచియొక్క భుజలు ఎంతెంత? ఓ గణితజ్ఞా! నీవు క్షేత్రవ్యవహారమందు మిక్కిలి సమర్థుడవేని సమస్తమును చెప్పుము.

న్యాసః భూమానం ౩౦౦ ముఖం ౧౨౫ బాహూ ౨౬౦, ౧౯౫ కర్ణౌ ౨౮౦, ౩౧౫ లంబౌ ౧౮౯. ౨౨౪

భూమి 300 ముఖము 125 భుజలు 260, 195 కర్ణములు 280, 315 లంబములు 189, 224. ఇందలి భూమి, ముఖము, భుజలు, కర్ణములు (85. ఉదా. శ్లో.) ఇదివరకు పూర్వము సూచించబడిన క్షేత్రమునందలి భుజకర్ణములకు పంచ 5 గుణితములై యున్నవి.



భూమి = కగ, ముఖ = జత, జడ = ప్రథమలంబము, కజ = ప్రథమభుజ, కత = ప్రథమకర్ణము, తయ = ద్వితీయలంబ, గత = ద్వితీయభుజ, గజ = ద్వితీయకర్ణము, దల = కర్ణయోగమునుండి లంబము, చన = సూచిలంబము, జచత = సూచి. ఇందు స, ట, ఇవికర్ణలంబయోగములు.

కడ, కక, టజ, టగ, నల, కల, గల; చజ, జచ, తచ, ఇవి ఎంతెంత? అని ప్రశ్నించబడినవి.

అథసంధ్యాద్యానయనాయకరణసూత్రం వృత్తద్వయం.
లంబతదాశ్రితబాహ్వో ర్మధ్యం సంధ్యుత్థలంబవస్త్వ।
సంధ్యన్యా భూఖండం సాధ్యం యుక్త్యాధరం ఖండం॥ ౧౧౧॥

[illegible]

[illegible] ॥ ౧౦౩ ॥

[illegible]

౧౭౮. ప్ర. (౧) [illegible]

(౨) [illegible]

(౩) [illegible]

[illegible]

అథ అవలంబ [illegible] సాధ్యం. [illegible]

[illegible]

[illegible] 189 [illegible] 195 [illegible] (168 [illegible]) [illegible] 224 [illegible] 280 [illegible] $48 \times 224 = 10752$, [illegible] $48 \times 280 = 13440$ [illegible] 132 [illegible] 300 [illegible] 168 [illegible] $\frac{10752}{168} = 64$ [illegible]

[illegible] $\frac{13440}{168} = 80$ [illegible]

[illegible] 224 [illegible] 132 [illegible] 132 [illegible] 315 [illegible] 252 [illegible] $\frac{132 \times 168}{252} = 88$ [illegible], $\frac{132 \times 315}{252} = 165$ [illegible]

[illegible]

ఉపపత్తి: [illegible]

అథకర్ణయోగా దధోలంబజ్ఞానార్థం సూత్రం.

లంబౌ భూఘ్నౌ నిజనిజయోగవిభక్తౌ చ సంశ్రుతీ స్యాతాం।
తాభ్యాం ప్రాగ్వచ్ఛ్రుత్యోర్యోగా ల్లంబః ఖండే చ॥౧౬౩॥

టీ॥ లంబౌ = లంబములు భూఘ్నౌ = భూమిచే గుణింపబడినవై నిజనిజయోగవిభక్తౌ = [illegible] సంశ్రుతీ = [illegible] స్యాతాం = అగుచున్నవి తాభ్యాం = [illegible] ప్రాగ్వత్ = పూర్వప్రకారము (౧౬౦ శ్లో॥ నూ॥) శ్రుత్యోః = కర్ణములయొక్క యోగాత్ = యోగమునందు లంబః = లంబమున్ను ఖండే చ = అబాధలున్ను (సాధింపదగినవి)

177. [illegible]

లంబౌ ౧౮౯, ౩౩౬ భూ ౩౦౦ భూఘ్నౌ స్వస్వయోగాభ్యాం ౫౨౫, ౫౨౫ భక్తౌ ఏవ మత్ర లబ్ధౌ సంశ్రుతీ [illegible] అత్రాన్యోన్యమూలాగ్రగసూత్రయోగా దిత్యాదికరణేన లబ్ధః కర్ణయోగా దధోలంబః [illegible]

లంబములను భూమిచే గుణించి [illegible] వాటి సంశ్రేఖలు $\frac{189 \times 300}{252} = \frac{56700}{252} = 225$ అక ఇట్లు $\frac{336 \times 300}{252} = \frac{100800}{252}$ = 400 దగ, ఈ అక, దగ రేఖలు [illegible] (౧౬౦ ప్రకృ. చే) [illegible] $\frac{400 \times 225}{400 + 225} = 144$ అగు అబాధలు 108 కళ, 192 ఖగ.

[illegible]

$\therefore \frac{దద \times కగ}{దగ}$ = అక = సంశ్రేఖ, ఇట్లు [illegible]

[illegible] (౧౬౧ ప్రకృ. చే) [illegible]

అథ సూచ్యాబాధాలంబభుజజ్ఞానార్థం సూత్రం వృత్తత్రయం.

లంబహృతౌ నిజసంధీ పరలంబగుణౌ సమాహ్వయౌ జ్ఞేయౌ।
సమపరసంధ్యోర్యోగా ద్వైకల్యంహార స్తేనోద్ధృతౌ తౌ చ॥ ౧౬౪॥
సమపరసంధీ భూఘ్నౌ సూచ్యాబాధే పృథక్ క్రమాత్స్యాతాం।
హారహృతః పరలంబః సూచీలంబో భవే ద్యుత్యోః॥ ౧౬౫॥
సూచీలంబఘ్నభుజౌ నిజనిజలంబోద్ధృతౌ భుజౌ సూచ్యాః।
ఏవం క్షేత్రక్షోదః ప్రాజ్ఞైస్త్రైరాశికాత్క్రియతే॥ ౧౬౬॥

టీ॥ లంబహృతౌ = లంబముచే భాగింపబడిన నిజసంధీ = ఆ లంబముయొక్క సంధి పరలంబగుణౌ = పరలంబముచే గుణింపబడినవి [illegible] జ్ఞేయౌ = తెలియదగినవి. సమపరసంధ్యోః = [illegible] యోగః = [illegible] హారః = హారమగును. తే = ఆ సమపరసంధీ = [illegible] భూఘ్నౌ = భూమిచే గుణింపబడినవి [illegible] సూచ్యాబాధే = [illegible] హారహృతః = హారముచే భాగింపబడిన పరలంబః = [illegible] సూచీలంబః = సూచీలంబము భవేత్ = అగును. సూచీలంబఘ్నభుజౌ = సూచీలంబముచే గుణింపబడినభుజములు నిజనిజలంబోద్ధృతౌ = [illegible] సూచ్యాః = [illegible] భుజౌ = భుజములు (అగును) ఏవం = ఈప్రకారముగా ప్రాజ్ఞైః = బుద్ధి[illegible]

[illegible]

178. ప్ర. (1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

(4) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 224 [illegible] 182 [illegible]

[illegible] $\frac{182 \times 189}{224} = \frac{891}{8}$ [illegible]

[illegible] $\frac{891}{8} + \frac{48}{1} = \frac{1275}{8}$ [illegible]

[illegible]

$\frac{891 \times 300 \times 8}{8 \times 1275} = \frac{891 \times 300}{1275} = \frac{3564}{17}$ [illegible] $\frac{48 \times 300 \times 8}{1275} = \frac{1536}{17}$

[illegible]

[illegible]

[illegible] 189, [illegible] 48 [illegible]

[illegible] $\frac{48 \times 224}{189} = \frac{512}{9}$ [illegible]

[illegible] $\frac{512}{9}+\frac{132}{1}=\frac{1700}{9}$ [illegible]

[illegible] $\frac{512\times300\times9}{9\times1700}=\frac{512\times3}{17}=\frac{1536}{17}$ [illegible]

[illegible] $\frac{132\times300\times9}{1700}=\frac{3564}{17}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] 224 [illegible]

$\frac{224\times300\times9}{1700}=\frac{6048}{17}$ [illegible] 182 [illegible] $\frac{182\times300\times9}{1375}$

$=\frac{6048}{17}$ [illegible]

[illegible]

$$\frac{195}{1}\times\frac{6048}{17}\times\frac{1}{189}=\frac{6240}{17},\ \text{[illegible]}\ \frac{6048\times260}{224}=\frac{7020}{17}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

అట్లు కఖ — కఘ = ఘఖ, గఘ — గక = కఘ అని = మొదలగు.

ఈమూడు క్షేత్రాల పరిభాగమంతయు క్షేత్రము యొక్క ఫలము చేయగ తెలియును.

కఘగ అనెడి త్రిభుజక్షేత్రమునందు కఘగ త్రిభుజఫలమునందున గలత్రిభుజఫలములను వ్యవకలనము చేయగా ఫలము గనుచున్నది. లేక ఇందు కర్ణములు పరస్పరలంబ రూపములగుటచే (167 ప్రశ్న, 2 విధిచే) ఫలము తెలియుచున్నది.

లేక కఘక బాహ్యము, యతిగ బాహ్యము, సమలంబచతుర్భుజము. వీటి ఫలముల యోగము చతుర్భుజఫలము అగుచున్నది.

ఇట్లు చేయ చేయగ గెలిచిన ఫలములగుచున్న యోగము అనగ చతుర్భుజక్షేత్రమునందు సమస్తఫల మగుచున్నది. విస్తరభీతిచే చూపలేదు.

వృత్త క్షేత్ర వ్యవహారము.

వృత్తక్షేత్రే కరణసూత్రం వృత్తం.

వ్యాసే భనందాగ్నిహతే విభక్తే ఖబాణసూర్యైః పరిధిస్తు సూక్ష్మః।
ద్వావింశతిఘ్నే విహృతేఽథ శైలైః స్థూలోఽథవా స్యాద్వ్యవహారయోగ్యః॥

టీ॥ వ్యాసే = వ్యాసము, భనందాగ్నిహతే = 3927 చే గుణింపబడి ఖబాణసూర్యైః = 1250 చే, విభక్తే = భాగింపబడినదగునో, సః = అలబ్ధము, సూక్ష్మః = సరియైనదగు, పరిధిః = పరిధి(యగును) అథవా = లేక, ద్వావింశతిఘ్నే = 22 చే గుణింపబడినదైన, శైలైః = 7 చే, విహృతే = భాగింపబడిన దగునో, వ్యవహారయోగ్యః = వ్యవహారమునకుపయోగించు, స్థూలః = స్వల్పాంతరము గల, పరిధిః = పరిధి, స్యాత్ = అగును.

179. ప్ర. వ్యాసముచే పరిధిని గనుగొనుట.

(1) వ్యాసమును $\frac{3927}{1250}$ చే గుణించినచో సూక్ష్మపరిధి యగును, పరిధిని దీనిచే భాగింప వ్యాసమగును.

(2) వ్యాసమును $\frac{22}{7}$ చే గుణించిన స్థూలపరిధి యగును, పరిధిని దీనిచే భాగింప స్థూలవ్యాస మగుచున్నది.

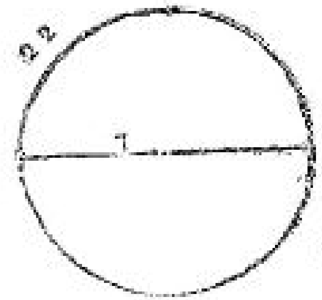
సాధారణముగ గణితము చేయుటయందు సులభమగుటచే నీ (2) పద్ధతి యుపయోగింపబడుచున్నది.

ఉదాహరణం.

విష్కంభమానం కిల సప్త యత్ర తత్ర ప్రమాణం పరిధేః ప్రచక్ష్వ।
ద్వావింశతిర్యత్పరిధిప్రమాణం తద్వ్యాససంఖ్యాం వద మే విచింత్య॥

తా॥ ఒకవృత్తక్షేత్రమునందు వ్యాసము 7 గజములు ఉన్నది. అందు పరిధి యెంత? చెప్పుము. పరిధి 22 గజములున్నచో ఆవృత్తక్షేత్రమునందు వ్యాస ప్రమాణమున్ను ఎంతయో ఆలోచించి చెప్పుము.

న్యాసః. వ్యాసప్రమాణం 7 లబ్ధం పరిధిమానం $21\frac{1239}{1250}$ సూక్ష్మం స్థూలం వా 22 ॥ న్యాసః అథవా పరిధితో వ్యాసానయనాయ గుణహారవిపర్యయేణ వ్యాసమానం $7\frac{11}{3927}$ స్థూలం వా 7.



వ్యాసము 7 పరిధియెంత ?

వ్యాసము 7 ను 3927 చే గుణించి 1250 చే భాగింపవలయును కావున $\frac{7\times3927}{1250}=\frac{27489}{1250}$ $=21\frac{1239}{1250}$ సూక్ష్మపరిధి యగుచున్నది. లేక వ్యాసమును 22 చే గుణించి 7 చే భాగింప $\frac{22\times7}{7}=22$ పరిధి యగుచున్నది. ఇది స్థూలము.

ఇట్లు పరిధి 22 అగుచో దానిని 1250 చే గుణించి 3927 చే భాగింపవలయును కావున $\frac{22\times1250}{3927}=\frac{27500}{3927}=7\frac{11}{3927}$ ఇది వ్యాస మగుచున్నది. ఇది సూక్ష్మము. లేక పరిధిని 7 చే గుణించి 22 చే భాగింప $\frac{22\times7}{22}=7$ ఇది వ్యాసమాన మగుచున్నది. ఇది స్థూలము.

ఉపపత్తి: సిద్ధాంతశిరోమణి గోళాధ్యాయమునందు భాస్కరాచార్యులవారు ఇట్లు వ్రాసియున్నారు "పెద్దవ్యాసముగల ఒకవృత్తమును కల్పించి ఆవృత్త పరిధిని ఒకానొక పెద్దసంఖ్య (100 కంటె పెద్దసంఖ్య) చే భాగించి ఆయిభాగము చేసిన చాపములను త్రిజ్యాకారమున జ్యాసాధనము చేయవలయును. ఆ జ్యాను పరిధివిభాగించినసంఖ్యచే గుణించిన పరిధిమానము వచ్చును." భాగించుసంఖ్య యొక్క అధిక్యమునుబట్టి ఆఅంశము యొక్క జ్యాచాపములు సరియగుచున్నవి. కావున జ్యామానమే చాపమానము అగును. ఆపెద్దసంఖ్యచే జ్యామానమును (చాపమానము)ను గుణించిన పరిధిమానము అగును.

అట్టి వ్యాసమునకును పరిధికిని గల సంబంధము అనగా వృత్తవ్యాసపరిధుల లక్షణము ఉండుటచే దానిబట్టి త్రైరాశికముచే వ్యాసమువలన పరిధియు పరిధి వలన వ్యాసమున్ను తెలియుచున్నది. అట్లు కోటిద్వయవ్యాసమందు పరిధిని సాధించగ 3927 అగుచున్నది. అనగా ఇష్టవ్యాసమును ఈపరిధిచే గుణించి కోటిద్వయముచే భాగింపగా ఇష్టవృత్తపరిధి యగును. కావున 3927/1250 ఈ సంఖ్యచే వ్యాసమును గుణించిన పరిధి యగును. ఇది పెద్దసంఖ్య అగుచున్నది కావున స్థూలాంతరముచే 22/7 ఇట్లు గ్రహించబడియున్నది. దీనిని 3 చే భాగించి 1 1/7 అగుచున్నది. లేక స్థూలసంఖ్యలు అనేకమానములు (63 వ పొ. 63 (ఉ.దా.)) ఇట్లు అగుచున్నవి. ఇందు రెండవదగు సూక్ష్మమానము దీనిని గ్రహించి స్థూలపద్ధతి యని చెప్పబడినది. ఇట్లు గణితశాస్త్రజ్ఞులు కొందరు మానమును గ్రహించియు వ్యాసమును 3చే గుణించిన అది పరిధియగును గలదు. ఈ అనన్తమానములందు ఒక మానమును గ్రహించి

"వ్యాసే భనందాగ్ని (3927) హతే విభక్తే ఖబాణసూర్యైః (1250) పరిధిః స సూక్ష్మః
ద్వావింశతిఘ్నే విహృతేऽథ శైలైః స్థూలోऽథవా స్యాద్వ్యవహారయోగ్యః" అని

మ. మ. పం. బాపుదేవ శాస్త్రిగారు చెప్పియున్నారు.

వృత్త గోలయోః ఫలానయనే కరణసూత్రం వృత్తం.

వృత్తక్షేత్రే పరిధిగుణితవ్యాసపాదః ఫలం తత్క్షుణ్ణం వేదైరుపరి పరితః కందుకస్యేవ జాలం। గోలస్యైవం తదపి చ ఫలం పృష్ఠజం వ్యాసనిఘ్నం షడ్భిర్భక్తం భవతి నియతం గోలగర్భే ఘనాఖ్యం॥

టీ॥ పరిధిగుణితవ్యాసపాదః = పరిధిచే గుణింపబడిన వ్యాసముయొక్క చతుర్థాంశము, వృత్తక్షేత్రే = వృత్తక్షేత్రమందు, ఫలం = ఫలము, తత్ = ఆవృత్తక్షేత్రఫలము, వేదైః = 4చే, క్షుణ్ణం = గుణింపబడినదై, గోలస్య = గోలముయొక్క, ఉపరి = పైభాగమునందు, కందుకస్య = బంతియొక్క, ఉపరి = పైభాగమునందలి, జాలమివ = వలవలెనున్న, ఫలం = ఫలము, భవతి = అగును. ఏవం = ఈప్రకారము, తత్ = ఆ, పృష్ఠజం = పైభాగమునందైన, ఫలమపి = ఫలమున్ను, వ్యాసనిఘ్నం = వ్యాసముచే గుణింపబడినదై, షడ్భిః = 6చే, భక్తం = భాగింపబడినదై, గోలగర్భే = గోలగర్భమునందు, ఘనాఖ్యం = ఘనమను పేరుగల, నియతం = నియతమైన, ఫలం = ఫలము, భవతి = అగుచున్నది.

180. సూ. (1) వృత్తక్షేత్రఫలము.

పరిధిని వ్యాసముచే గుణించి 4చే భాగించిన వృత్తక్షేత్రఫలము అగును.

(2) గోలపృష్ఠఫలము.

ఆవృత్తక్షేత్రఫలమును 4చే గుణించిన అనగా పరిధిని వ్యాసముచే గుణించిన గోలపృష్ఠఫలమగును.

(3) గోలఘనఫలము.

ఆగోలపృష్ఠఫలమును వ్యాసముచే గుణించి 6చే భాగించిన గోలఘనఫలము.

ఉదాహరణమ్

యద్వ్యాసస్తురగైర్మితః కిల ఫలం క్షేత్రే సమే తత్ర కిం వ్యాసః సప్తమితశ్చ యస్య సుమతే గోలస్య తస్యాపి కిం। పృష్ఠే కందుకజాలసన్నిభఫలం గోలస్య తస్యాపి కిం మధ్యే బ్రూహి ఘనం ఫలంచ విమలాం చేద్వేత్సి లీలావతీం॥ ౯౦॥

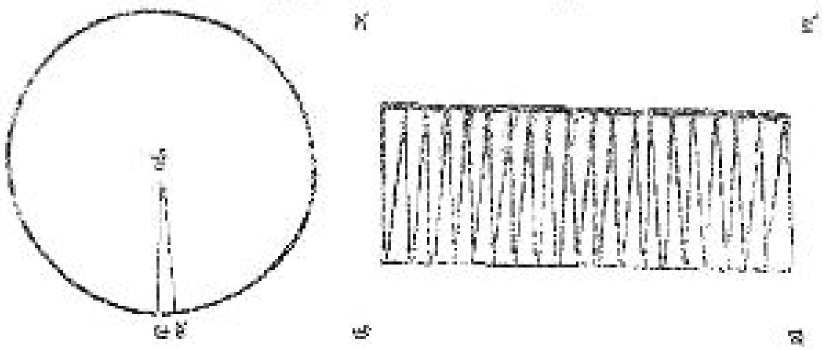
తా॥ ఏవృత్తక్షేత్రమందు వ్యాసము 7 గలదియో ఆ సమవృత్తక్షేత్రమునందు క్షేత్రఫల మెంతయగును? బుద్ధిమంతురాలా! అట్లు 7 వ్యాసము గల గోళమునకు గోలపృష్ఠమునందు కందుకమునకు వలవలెనున్న ఫలము ఎంతయగును? ఆగోళమునకే మధ్యమందు ఘనఫల మెంత యగును? నీవు నిర్మలమగు లీలావతీగణితము నెరింగితివేని చెప్పుము.

వ్యాసః. వ్యాసే [illegible] లబ్ధం క్షేత్రఫలం [illegible] గోళపృష్ఠ ఫలం [illegible] గోళాన్తర్గత ఘనఫలం [illegible]

వ్యాసము 7 అగునపుడు సూక్ష్మ పరిధి 21 $\frac{1239}{1250}$ కావున $\frac{\text{ప} \times \text{వ్యా}}{4} = \frac{27489 \times 7}{1250 \times 4}$ $= 38\frac{2423}{5000}$ క్షేత్రఫల మగుచున్నది. ఈ క్షేత్రఫలమును 4చే గుణించిన గోళపృష్ఠ ఫలము $\frac{192423 \times 4}{1250 \times 4} = \frac{192423}{1250} = 153\frac{1173}{1250}$

ఘనఫలము $= \frac{\text{పృ.ఫ} \times \text{వ్యా}}{6} = \frac{192423 \times 7}{1250 \times 6} = \frac{64141 \times 7}{1250 \times 2} = \frac{448987}{2500} = 179\frac{1487}{2500}$

ఉపపత్తి: (1) వృత్త క్షేత్ర ఫలమునకు సూత్రము.



వృత్త క్షేత్రము [illegible]

ఇందు అక $= \frac{\text{ప}}{\text{యూ}}$ కావున $\frac{\text{కేక} \times \text{ప}}{2 \times \text{యూ}}$ [illegible]

$\therefore \frac{\text{కేక} \times \text{ప} \times \text{యూ}}{2 \times \text{యూ}} = \frac{\text{కేక} \times \text{ప}}{2}$; $\because$ కేక $= \frac{\text{వ్యా}}{2}$ $\therefore \frac{\text{వ్యా} \times \text{ప}}{2 \times 2}$ అగుచున్నది.

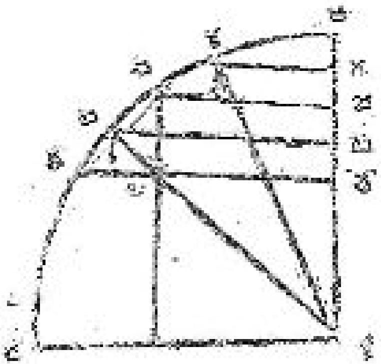
[illegible]

అఇ $=$ కక $= \frac{\text{ప}}{2}$ అగుచున్నది. అక $=$ ఇఈ $=$ కేక $= \frac{\text{వ్యా}}{2}$ అగును.

$\therefore$ అఇ $\times$ అక $= \frac{\text{ప} \times \text{వ్యా}}{2 \times 2} = \frac{\text{ప} \times \text{వ్యా}}{4}$ ఆయతఫలము కేక వృత్త క్షేత్రఫలము.

(2) గోళ పృష్ఠ ఫలానయనమునకు సూత్రము.

[illegible]



[illegible]

$\therefore$ [illegible] $=$ గోలార్ధపృష్ఠఫలం [illegible]

[illegible]

[illegible]

ప్రకారాంతరేణ ఫలానయనే కరణసూత్రం సార్ధవృత్తం.

వ్యాసస్య వర్గే భనవాగ్నినిఘ్నే సూక్ష్మం ఫలం పంచసహస్రభక్తే
రుద్రాహతే శక్రహృతే ఽథవా స్యాత్ స్థూలం ఫలం తద్వ్యవహారయోగ్యం
ఘనీకృతవ్యాసదలం నిజైకవింశాంశయుగ్గోలఫలం ఘనం స్యాత్ ॥

[illegible]

181. ప్ర. (1). [illegible]

(2) [illegible]

(3) వ్యాసముయొక్క ఘనముయొక్క సగమునందు దాని యిరువదియొకటవభాగము కలిపిన గోళఘనఫలమగును.

వ్యాసః. జాతం తదేవ సూక్ష్మంఫలం ౩౯౨౭/౫౦౦౦

స్థూలంవాతిరా ౧౧/౧౪ ఘనఫలంవా ౧౧/౨౧

వ్యాసము 7 అగుచుండగా వ్యాసవర్గము 49 దీనిని 3927 చే గుణించి 5000 చే భాగించిన $\frac{49\times3927}{5000} = 38\frac{2423}{5000}$ అగుచున్నది.

అట్లు $\frac{7^2\times11}{14} = 38\frac{1}{2}$ అట్లు ఘనఫలము $\left(\frac{7^3}{2}\right)+\text{వ్యా}\frac{1}{21} = 179\frac{2}{3}$

ఉపపత్తి: (1) $\text{వృత్త} = \frac{\text{వ్యా}\times\text{వ}}{4}$, $\text{వ} = \frac{\text{వ్యా}\times3927}{1250}$

$\therefore \frac{\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}\times3927}{5000} = \text{వృత్త}$

(2) అట్లు $\text{వ} = \frac{\text{వ్యా}\times22}{7}$ అగును. $\frac{\text{వ్యా}\times\text{వ}}{4}$

$= \frac{\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}\times22}{7\times4} = \frac{\text{వ్యా}^2\times11}{14} = \text{వృత్త}.$

(3) $\text{గోళఘనఫల} = \frac{\text{వ}\times\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}}{6}$ (180 చూడుము).

$\because \text{వ} = \frac{\text{వ్యా}\times22}{7} \quad \therefore \text{గోఘన} = \frac{\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}\times22}{7\times6}$

$= \frac{\text{వ్యా}^3\times22}{42} = \frac{\text{వ్యా}^3\times22}{2\times21} = \frac{\text{వ్యా}^3\times21+\text{వ్యా}^3}{2\times21} = \left(\frac{\text{వ్యా}^3}{2}\right)+\text{వ్యా}\frac{1}{21}$

అగుచున్నది.

182. బ్ర. ఇట్లు మ. మ. సం. బాపుదేవశాస్త్రిగారి శ్లోకపరిహారము.

ఈ $\frac{\text{వ్యా}\times355}{113}$ కాబట్టి $\text{వృత్త} = \frac{\text{వ్యా}^2\times355}{4\times113} = \frac{\text{వ్యా}^2\times355}{452}$ కాబట్టి

వ్యాసవర్గే శరబాణాగ్ని (355) ఘ్నే చేద్రసశరాబ్ధిభిః (452)।
విభాజితే భవేత్ సూక్ష్మం వృత్తే సూక్ష్మతరం ఫలం॥

$\text{వ}\times\text{వ్యా} = \frac{\text{వ్యా}^2\times355}{113}$ = గోళపృష్ఠఫలం కాబట్టి

పంచపంచాగ్నిభిః (355) ఘ్నే వ్యాసవర్గే త్రిశశిశంకరైః (113)।
విభక్తే పృష్ఠజం గోలే ఫలం సూక్ష్మతరం భవేత్॥

$\frac{\text{వ. వ్యా. వ్యా}}{6} = \frac{\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}\times355}{6\times113} = \frac{\text{వ్యా}^3\times355}{678}$ = గోళఘనఫల

ఘనే వ్యాసస్య సంఘ్నే శరబాణాగ్నిభిః (355)।
వసుసప్తర్తుభిః (678) హృతే గోలే ఘనఫలం స్ఫుటం॥

ఈ బాపుదేవశాస్త్రిగారి శ్లోకము ఉపపన్నము అగుచున్నది.

శరజీవానయనాయ కరణసూత్రం సార్ధవృత్తం

జ్యావ్యాసయోగాంతరఘాతమూలం వ్యాసస్తదూనో దలితః శరః స్యాత్। వ్యాసాచ్ఛరోనాచ్ఛరసంగుణాచ్చ మూలం ద్వినిఘ్నం భవతీహ జీవా। జీవార్ధవర్గే శరభక్తయుక్తే వ్యాసప్రమాణం ప్రవదన్తి వృత్తే॥ ౧౧౧॥

టీ॥ జ్యా వ్యాస యోగాంతర ఘాతమూలం = జ్యావ్యాసముల యోగమును జ్యావ్యాసముల అంతరముచే గుణించగా వచ్చు సంఖ్యయొక్క మూలము చేత వ్యవకలింపబడినదై, దలితః = అర్ధించబడినదై, శరః = శరము, స్యాత్ = అగును. శరోనాత్ = శరముచే వ్యవకలింపబడినదియు, శరసంగుణాత్ = శరముచే గుణింపబడినదియునగు వ్యాసాత్ = వ్యాసమువలనగనగు, మూలం = మూలము, ద్వినిఘ్నం = 2 చే గుణింపబడినదై, ఇహ = ఈగణితమునందు, జీవా = జ్యా, భవతి = అగుచున్నది.

జీవార్ధవర్గే = జ్యార్ధముయొక్క వర్గము, శరభక్తయుక్తే = శరముచే భాగించబడి శరముతో కలుపబడినదియైనచో (అయినట్లయిన) వృత్తే = వృత్తమందు వ్యాస ప్రమాణం = వ్యాసపరిమాణమును ప్రవదంతి = చెప్పుచున్నారు.

శరమును తెలియుట.

183. ప్ర. (1) జ్యా అనగా పూర్ణజ్యయని యెరుగవలయును గ్రహింప వలయును. ఇట్లుగల పూర్ణజ్యయొక్కయు వ్యాసముయొక్కయు యోగాంతర ఘాతముయొక్క మూలమును వ్యాసములోన వ్యవకలించి అర్ధించిన శరమగును.

పూర్ణజ్యను తెలియుట.

(2) వ్యాసములోన శరమును వ్యవకలించి ఆశేషమును శరముచే గుణించగా దానియొక్క వర్గమూలమును రెండుచే గుణించిన పూర్ణజ్య యగును.

వ్యాసమును తెలియుట.

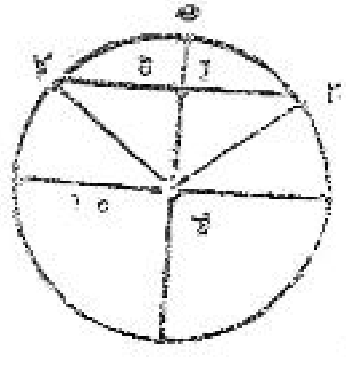
(3) పూర్ణజ్యయొక్క అర్ధముయొక్క వర్గమును శరముచే భాగించి శరమును కలిపిన వ్యాసమాన మగును.

ఉదాహరణం.

దశవిస్తృతి వృత్తాంతర్యత్ర జ్యా షణ్మితా సఖే।
తత్రేషుం వద బాణాజ్జ్యాం జ్యాబాణాభ్యాం చ విస్తృతిమ్॥

న్యాసః. వ్యాసః 10 జ్యా 6 లబ్ధో బాణః 1 అథ బాణః 1 వ్యాసః 10 లబ్ధా జ్యా 6. అథ జ్యాబాణయోః జ్ఞాతయోః లబ్ధా వృత్తవిస్తృతిః 10

తా॥ మిత్రమా! 10 వ్యాసపరిమాణముగల వృత్తమునందు జ్యాపరిమాణము 6 అయినచో వచ్చు శరమును చెప్పుము. అట్లు శరమును వ్యాసమును తెలిసినచో జ్యాపరిమాణ మెంతయగునో ఆ జ్యాశరములవలన వ్యాసమును చెప్పుము.



అకగ వృత్త వ్యాసము 10 ఈ వృత్తమునందు కగ పూర్ణజ్య 6 గలదు. ఇది కఆగ చాపము నకు పూర్ణజ్య 6 అగుచున్నది. ఇందు 'డెఆ' వ్యాసార్ధమునందు ఆ బిందువునుండి కగ పూర్ణ జ్యవరకునైన భాగము శరమనియు ఉత్క్రమ జ్యయనియు చెప్పబడుచున్నది. పూర్ణజ్య 6 వ్యాసము 10 శరమెంత ?

వ్యాసము 10తో పూర్ణజ్య 6ను కలుప 16 దీని అంతరము 10 — 6 = 4చే గుణింప 16 × 4 = 64 దీనిమూలము 8 ను వ్యాసము 10 లో వ్యవకలింప 10 — 8 = 2 అర్ధింప 1 ఇది శరపరిమాణము.

వ్యాసశరములు తెలిసి పూర్ణజ్య తెలియవలసినచో వ్యాసము 10 వలన శరము 1 దీని తీసివేయ 9 శరము 1చే గుణింప 9 × 1 = 9 మూలము 3 దీని 2చే గుణింప 6 పూర్ణజ్య.

శరపూర్ణజ్యలు తెలిసి వ్యాసము తెలియవలసినచో పూర్ణజ్యా 6 అర్ధము 3 దీనియొక్క వర్గము 9 ను శరముచే భాగింప 9 ఇందు శరమును కలుప 10 వ్యాసము.

ఉపపత్తి: (1) డెఆ = డెక = వ్యాసార్ధము. ఈవ్యాసార్ధమువలన శరమును వ్యవకలించిన కేంద్రమునుండి పూర్ణజ్యార్ధపర్యంతమైన 'డెఇ' వ్యాసార్ధముయొక్క ఖండము అగుచున్నది. అది కోటి. పూర్ణజ్యార్ధము భుజ, వ్యాసార్ధము కర్ణము. ఇది జాత్యత్రిభుజము.

$\therefore \left(\frac{\text{వ్యా}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{జ్యా}}{2}\right)^2 = \text{కోటి}^2$ అగుచున్నది. కావున

$$\sqrt{\frac{\text{వ్యా}^2}{4} - \frac{\text{జ్యా}^2}{4}} = \frac{\sqrt{\text{వ్యా}^2 - \text{జ్యా}^2}}{2} = \text{కో} \quad \therefore \sqrt{\text{వ్యా}^2 - \text{జ్యా}^2} = 2\,\text{కోటి}$$

వర్గాంతరము యోగాంతరఘాతసమమగుటచే $\sqrt{(\text{వ్యా} + \text{జ్యా})(\text{వ్యా} - \text{జ్యా})} = 2\,\text{కోటి}$; $\frac{\text{వ్యా}}{2} - \text{కో} = \text{శర}$ $\therefore \text{వ్యా} - 2\,\text{కో} = 2\,\text{శ}$ కావున జ్యావ్యాస యోగాంతర ఘాత మూలమును వ్యాసములోన వ్యవకలించి అర్ధించిన శరమగుచున్నది.

(2) $\left(\frac{\text{వ్యాస}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{వ్యాస}}{2} - \text{శ}\right)^2 = \left(\frac{\text{భూజ్యా}}{2}\right)^2$ అగుచున్నది.

$\frac{\text{వ్యా}}{2} = \text{త్రి}$ కావున

$\text{త్రి}^2 - (\text{త్రి} - \text{శ})^2 = \text{త్రి}^2 - (\text{త్రి}^2 - 2\,\text{త్రి}.\text{శ} + \text{శ}^2) = \left(\frac{\text{జ్యా}}{2}\right)^2$

$= \sqrt{2\,\text{త్రి}.\text{శ} - \text{శ}^2} = \sqrt{\text{వ్యా}.\text{శ} - \text{శ}^2} = \sqrt{(\text{వ్యా} - \text{శ})\,\text{శ}} = \frac{\text{జ్యా}}{2}$

దీనిని ద్విగుణించిన పూర్ణజ్యా యగును.

(3) అతిరిక్తమున $\sqrt{(\text{వ్యా} - \text{శ})\,\text{శ}} = \frac{\text{జ్యా}}{2}$ కావున.

$\left(\frac{\text{జ్యా}}{2}\right)^2 = (\text{వ్యా} - \text{శ})\,\text{శ} \therefore \left(\frac{\text{జ్యా}}{2}\right)^2 \div \text{శ} + \text{శ} = \text{వ్యాస}.$

వృత్తాంత త్ర్యస్రాది నవాస్రాంత క్షేత్రాణాం భుజమానానయనాయ కరణసూత్రం వృత్తత్రయం.

త్రిద్వ్యంకాగ్నినభశ్చంద్రైః ౧౦౩౯౨౩ త్రిబాణాష్టయుగాష్టభిః ౮౪౮౫౩। వేదాగ్నిబాణఖాశ్వైశ్చ ౭౦౫౩౪ ఖఖాభ్రాభ్రరసైః ౬౦౦౦౦ క్రమాత్॥ ౧౦౨॥ బాణేషునఖబాణైశ్చ ౫౨౦౫౫ ద్విద్వినందేషుసాగరైః ౪౫౯౨౨। కురామదశవేదైశ్చ ౪౧౦౩౧ వృత్తవ్యాసే సమాహతే॥ ౧౦౩॥ ఖఖఖాభ్రార్కసంభక్తే ౧౨౦౦౦౦ లభ్యంతే క్రమశో భుజాః। వృత్తాంత త్ర్యస్రపూర్వాణాం నవాస్రాంతం పృథక్ పృథక్॥ ౧౦౪॥

184. వ్ర. తా॥ అభీష్టవ్యాసముగల వృత్తమునందు సమబాహుకములగు త్రిభుజ చతుర్భుజ పంచభుజ షడ్భుజ సప్తభుజ అష్టభుజ నవభుజ క్షేత్రములు చేయవలసినచో పద్ధతి:—

అభీష్టవృత్తముయొక్క వ్యాసమును 103923 చే గుణించి 120000 చే భాగించిన వృత్తాంతర్గత సమభుజ త్రిభుజముయొక్క ఒకభుజకొలత వచ్చును.

అట్లు 84853 చే గుణించి 120000 చే భాగించిన చతుర్భుజ భుజ

70534 చే గుణించి 120000 చే భాగించిన పంచభుజ భుజ

60000 చే గుణించి 120000 చే భాగించిన షడ్భుజ భుజ

52055 చే గుణించి 120000 చే భాగించిన సప్తభుజ భుజ

45922 చే గుణించి 120000 చే భాగించిన అష్టభుజ భుజ

41031 చే గుణించి 120000 చే భాగించిన నవభుజ భుజయగును

ఉపపత్తి: 120000 వ్యాసముగా గల వృత్తమందు త్రిభుజాది భుజపరిమాణములు సాధించి చూపబడినవి. 120000 వ్యాసమునందు 103923 త్రిభుజభుజ యగుచో ఇష్టవ్యాసము గల వృత్తమునం దెంత ? ఇట్లు త్రైరాశికముచేయుట చెప్పబడెను.

"సప్తభుజ క్షేత్రభుజయందును నవభుజక్షేత్ర భుజయందును, సూక్ష్మవ్యాసమానపద్ధతిచే భుజలు సాధించిన 52066 న్ను 41042 న్ను వచ్చుచున్నవి. కావున భాస్కరాచార్యులు స్థూలపద్ధతిచే సాధించిరని చెప్పవలయును" అని మ. మ. పం. బాపుదేవశాస్త్రిగారును మ. మ. పం. సుధాకరద్వివేదిగారును వ్రాసిరి.

ఉదాహరణం.

సహస్రద్వితయం వ్యాసం యద్వృత్తం తస్య మధ్యతః।
సమత్ర్యస్రాదికానాం మే భుజాన్ వద పృథక్ పృథక్॥ ౭౫॥

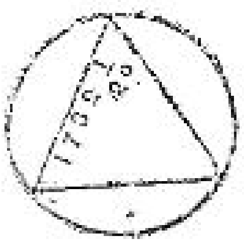
తా॥ ఏవృత్తము 2 వేలు (2000) వ్యాసము గలదియో ఆవృత్తముయొక్క మధ్యయందు సమభుజములు గల త్రిభుజ చతుర్భుజ పంచభుజ షడ్భుజ సప్తభుజ అష్టభుజ నవభుజ క్షేత్రములయొక్క భుజలు వేర్వేర చెప్పుము.

న్యాసః. వ్యాసః ౨౦౦౦ లబ్ధం త్ర్యస్రే భుజమానమ్ ౧౭౩౨ ౧/౨౦ చతురస్రే ౧౪౧౪ ౧౩/౬౦ పంచాస్రే ౧౧౭౫ ౧౭/౩౦. షడస్రే ౧౦౦౦ సప్తాస్రే ౮౬౭ ౭/౧౨ అష్టాస్రే ౭౬౫ ౧౧/౩౦ నవాస్రే ౬౮౩ ౧౭/౨౦ చ. ఏవ మిష్టవ్యాసే ప్యేవం వ్యాసా అపి జీవా స్స్యుర్విత్తి. తాస్తు గోలే జ్యోత్పత్తౌ వక్ష్యే.

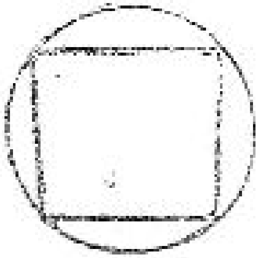
వ్యాసప్రమాణము 2000 గల వృత్తమునందు త్రిభుజాదిక్షేత్రములందు భుజపరిమాణములు.

వృత్తవ్యాసమును పైన చెప్పబడిన గుణకములచే గుణించి 120000 చే భాగించిన లబ్ధములు, క్రమముగ త్రిభుజాదిక్షేత్రములందు భుజ లగుచున్నవి.

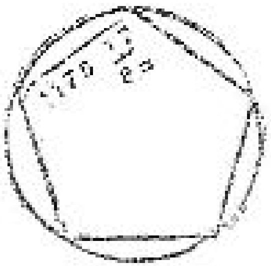
త్రిభుజ



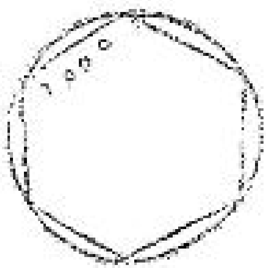
చతుర్భుజ, 1414 $\frac{13}{20}$



పంచభుజ



షడ్భుజ



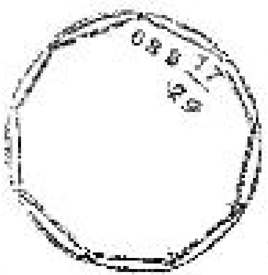
సప్తభుజ



అష్టభుజ, 765 $\frac{21}{30}$



నవభుజ



$\frac{2000 \times 103923}{120000} = 1732\frac{1}{12}$ త్రిభుజ భుజ,

$\frac{2000 \times 84853}{120000} = 1414\frac{13}{20}$ చతుర్భుజ భుజ,

$\frac{2000 \times 70534}{120000} = 1175\frac{17}{30}$ పంచభుజ భుజ,

$\frac{2000 \times 60000}{120000} = 1000$ షడశ్రిభుజము

$\frac{2000 \times 52055}{120000} = 867\frac{7}{12}$ సప్తాశ్రిభుజ, $\frac{2000 \times 45922}{120000} = 765\frac{21}{30}$ అష్టాశ్ర భుజ, $\frac{2000 \times 41031}{120000} = 683\frac{17}{20}$ నవాశ్రిభుజ, ఈస్థూలజ్యలవలన. ...

ముగల వృత్తమునందు ఇతరములగు పూర్ణజ్యలుమున్న సాధింపవచ్చును. వానిని భాస్కరాచార్యులు సిద్ధాంతశిరోమణియందు చెప్పియున్నారు.

అథస్థూలజీవాజ్ఞానార్థం లఘుక్రియాకరణసూత్రం వృత్తం.

చాపోననిఘ్నపరిధిః ప్రథమాహ్వయః స్యాత్ పంచాహతః పరిధివర్గచతుర్థభాగః। ఆద్యోనితేన ఖలు తేన భజేచ్చతుర్ఘ్నవ్యాసాహతం ప్రథమమాప్తమిహ జ్యకా స్యాత్ ॥ ౧౧౮॥

టీ॥ చాపోననిఘ్నపరిధిః = చాపముచే తీసివేయబడి చాపముచే గుణింపబడిన పరిధి, ప్రథమాహ్వయః = ప్రథమము అను పేరుగలది, స్యాత్ = అగును పరిధివర్గచతుర్థభాగః = పరిధివర్గముయొక్క 4వ వంతు, పంచాహతః (శేషః) = 5చే గుణింపబడినది. ఆద్యోనితేన = ప్రథమముచే వ్యవకలింపబడిన, తేన = ఆపరిధివర్గచతుర్థభాగముచే, చతుర్ఘ్నవ్యాసాహతం = 4చే గుణింపబడిన వ్యాసముచే గుణింపబడిన, ప్రథమం = ప్రథమమును, భజేత్ = భాగింపవలెను. ఆప్తం = అట్లు భాగింపగావచ్చినది, ఇహ = ఈచాపమునందు, జ్యకా = పూర్ణజ్యయై, స్యాత్ = అగును.

౹ ౮౫. ప్ర. అభీష్టచాపమునకు పూర్ణజ్య నెరుంగుట.

పరిధిప్రమాణమువలన చాపమును వ్యవకలించి శేషమును చాపముచే గుణింపుము. దానికి ప్రథమము లేక ఆద్యము అనిపేరు.

పరిధిని వర్గించి 4చే భాగింపగా లబ్ధమును 5చే గుణించి ఆద్యమువలన వ్యవకలింపుము. ఈశేషముచే నాలుగుచేతను వ్యాసముచేతను గుణింపబడిన ఆద్యమును భాగింపుము లబ్ధము అభీష్టచాపమునకు పూర్ణజ్య యగును.

ఉదాహరణం

అష్టాదశాంశేన వృతేః సమానమేకాదిని ఘ్నాని చ యత్ర చాపం। పృథక్ పృథక్ తత్ర వదాశు జీవాః ఖార్కైర్మితం వ్యాసదలం యదత్ర ॥ ౨౦౩॥

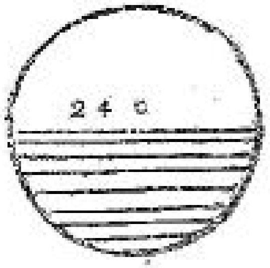
తా॥ వ్యాసప్రమాణము 240 (వ్యాసార్ధము 120) అగు వృత్తక్షేత్రమునందు పరిధిని 18చే భాగింపగావచ్చినదానిని 1, 2, 3 మొదలగుసంఖ్యలచే వేర్వేర గుణింపగావచ్చునట్టి చాపములకు వేరువేరుగ పూర్ణజ్యాప్రమాణములను చెప్పుము.

న్యాసః. వ్యాసః ౨౪౦ అత్రైకాద్యంకలాభువాయు ర్వింశత్తే న్యాస్యార్ధ్యాకతాంశవ్యస్య మేలనేన పరిధిః ౭౫౪ అన్య అష్టాదశాంశః ౪౨ అత్రాస్యాంశేనాభువాయు ద్వితీయా అష్టాదశాంశయుక్తో గృహీతః అనేన ప్రకారేణాదనాననేన తుల్య ధనుషి జ్యాస్సాధ్యాః. అథవాత్ర సూక్ష్మం పరిధౌ అష్టాదశాంశేన పరిధిం ధనూంషి చాపవర్ష జ్యా స్సాధ్యన్తే తథాపి తా ఏవ భవంతి. అపవర్తితే న్యాసః. పరిధిః ౧౮ చాపాని, ౧, ౨, ౩, ౪, ౫, ౬, ౭, ౮, ౯ యథోక్తకరణేన లబ్ధాని జ్యామానాని ౪౨, ౮౨, ౧౨౦, ౧౫౪, ౧౮౪, ౨౦౮, ౨౨౬, ౨౩౬, ౨౪౦ ఏవ మాన్యస్మిన్నపి వ్యాసే।

ఉదా: వ్యాసము 240 దీనిచే పరిధి $\frac{240 \times 3927}{1250} = 753\frac{1230}{1250}$ ఇందు స్వల్పాంతరముచే 1250 భాగములలో 20 భాగములు కలుపగా 754 పరిధిగ గ్రహింపబడినది. ఈపరిధి 754ని 18చే భాగించ $41\frac{16}{18}$ అగుటను అంకసౌలభ్యమునకై 18వంతులలో 2వంతుల గ్రహించిన 42 అష్టాదశాంశ మగుచున్నది. దీనిని క్రమముగ ఏకాదిసంఖ్యలచే గుణింపగను గమున్నులను పూర్ణజ్యల సాధింపవలయును. ఏకాదిసంఖ్యలచే గుణింప 42, 84, 126, 168, 210, 252, 294, 336, 378 అగుచున్నవి.

ప్రథమజ్యాప్రకారము పరిధి 754లో చాపము 42ను వ్యవకలింప 712 ఈ-ధనము 42చే గుణింప 29904 ఇది ఆద్యము, పరిధి754వర్గమున్కు-పర్గము 568516లో నాలవ భాగము 142129 దీనిని 5చే గుణింప 710645 ఇందు ఆద్యము 29904 ను వ్యవకలింప 680741 శేషము వ్యాసము 240 ను 4చే గుణింప 960 దీనిచే ఆద్యము 29904ను గుణింప 28707840 ఈభాజ్యమును శేషము 680741చే భాగింప లబ్ధము $42\frac{116718}{680741}$ ఇది పూర్ణజ్యాపరిమాణ మగుచున్నది. ఇట్లు అన్నిటిని సాధింప వలయును.

లేక పరిధిని సమముగ (చాపము)లను అపవర్తించి జ్యాప్రకారము సాధించినను పూర్ణజ్యలు రాగలవు. ఇందుమూలమున రొండ్లు 42చే పరిధి నపవర్తించిన 18అగు పరిధియగుచు, చాపములు 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 అగును పరిధినుండి చాపమును వ్యవకలింప 18 — 1 = 17 చాపముచే దీనిని గుణింప 17 ఆద్యము, పరిధివర్గము 324యొక్క చతుర్థభాగము 81ను 5చే గుణింప 405 దీనినుండి ఆద్యమును వ్యవకలింప 388 శేషము, 4చే గుణింపబడిన వ్యాసము 960చే గుణింపబడిన చాపము 960 × 17 = 16320 దీనిని శేషము 388చే భాగింప లబ్ధము $42\frac{24}{388}$ పూర్ణజ్య.



ఇట్లు ఏకాద్యంకసంఖ్యలచే అష్టాదశాంశమును గుణింపగానైన చాపములకు పూర్ణజ్యాపరిమాణములు 42, 82, 120, 154, 184, 208, 226, 236, 240 అగుచున్నవి. ఇందు స్వల్పాంతరము గణింపక పూర్ణసంఖ్యలు చూపబడినవి.

ఉపపత్తి: జ్యాపరిమాణము సాధింపబడిన ఆద్యము పూర్ణజ్యాపరిమాణముతో చాపము కూడి యున్నది.

$అ = (ప - చా) చా =$ జ్యాచా అనుకొందము. ఇతర చాపములందు ఈ ఆద్యమును ఏకానేకసంఖ్యచే గుణించి ఒకానేకసంఖ్యచే భాగింపగను పూర్ణజ్యాపరిమాణ మగుచున్నది. కావున అనుపాతసంఖ్య 'యు'అనియు భాజకసంఖ్యను ఆద్యముతో కలుపగాగనుసంఖ్య 'కా' అనియు కల్పించుకొనుము అపుడు—

$$జ్యాచా = \frac{యు \times అ}{కా - అ} \text{ అగుచున్నది అనగా } \frac{(ప - చా) చా \times యు}{కా - (ప - చా) చా}$$

$$చాప = 180 = \frac{ప}{2} \text{ అనుకో } \frac{(ప - \frac{ప}{2})\frac{ప}{2} \times యు}{కా - (ప - \frac{ప}{2})\frac{ప}{2}} = \frac{యు \times \frac{ప^2}{4}}{కా - \frac{ప^2}{4}} = వ్యాస$$

$$\therefore యు \frac{ప^2}{4} = కా.వ్యా - \frac{ప^2}{4} \times వ్యా \therefore యు.ప^2 = 4కా.వ్యా - ప^2.వ్యా$$

$$ఇట్లు చాప = \frac{ప}{6} \text{ అనుకో } అద్య = \frac{5ప^2}{36} \therefore \frac{\frac{5ప^2}{36} \times యు}{కా - \frac{5ప^2}{36}} = జ్యా(\frac{ప}{6}) = \frac{వ్యా}{2}$$

$$\therefore యు \times 10ప^2 = కా.వ్యా 36 - 5ప^2.వ్యా \text{ అగుచున్నది.}$$

కావున చాప = $\frac{ప}{2}$ అనునప్పుడు $యు.ప^2 = 4 కా.వ్యా - వ్యా.ప^2$

బాణ = $\frac{\text{వ}}{\text{౫}}$ అనుకున్నచో గూ. వ^2 = $\frac{\text{౩౬ కా. వ్యా — వ్యా. వ}^2\text{౫}}{10}$

పై సమీకరణమువలన సమీకరణముచేయగా

40 కా. వ్యా — 10 వ్యా. వ^2 = 36 కా. వ్యా — వ్యా. వ^{2}5

∴ 40 కా — 10 వ^2 = 36 కా — వ^{2}5 ∴ కా = $\frac{5}{4}$వ^2

ఇట్లు గూ = $\frac{\text{వ్యా (4కా — వ}^2\text{)}}{\text{వ}^2} = \frac{\text{వ్యా (36 కా — వ}^2\text{5)}}{\text{వ}^2 10}$

కా = $\frac{5\text{వ}^2}{4}$ ఐనచో గూ = $\frac{\text{వ్యా(5వ}^2\text{ — వ}^2\text{)}}{\text{వ}^2} = \frac{\text{వ్యా(36వ}^2\text{ — వ}^2\text{)}}{2\text{వ}^2}$ = 4 వ్యా

కావున జ్యా = $\frac{\text{గూ × (వ — చా) చా}}{\text{కా — (వ — చా) చా}} = \frac{\text{4 వ్యా × అ}}{\frac{5\text{వ}^2}{4}\text{ — అ}}$ అగుచున్నది.

ఇచట (వ — చా) చా = అ = తెలియుటకు ఇట్లు గ్రహింపబడినది.

ఈపద్ధతి చాపముకూడ్య ముగుచున్నది. పరిధివక్రరేఖ చాపమునకు వృత్తము పరిధ్యర్ధము చాపమునకున్నను ఏక సమీకరణముచే చెప్పబడిన చాపము అగుచున్నను తెల్పక నరిపడును. ఇతరమాపములనువృత్తము సరిపడకుండును. దాని ఇట్లు అనేకములగు పరీక్షలవలన ఇతరచాపసమీకరణములవలన కొంతవరకు, కావున ఈపద్ధతిచే నిర్ణయించిన చాపము స్థూలముగ (అనన్యముగ) వ్యాసార్ధజ్య లగుచున్నది. కావున నే "స్థూలంజ్యాధనుర్జ్యాభిధా... నిర్ణీతం మయా" అని శ్రీభాస్కరాచార్యులు సిద్ధాంతశిరోమణియందు చెప్పియున్నారు.

అథ చాపానయనాయ కరణసూత్రం వృత్తమ్.

వ్యాసాబ్ధిఘాతయుతమౌర్వికయా విభక్తో జీవాంఘ్రిపంచ
గుణితః పరిధేస్తు వర్గః। లబ్ధోనితః పరిధివర్గచతుర్థభాగః ఆప్తే
పదే వృత్తదలాత్పతితే ధనుః స్యాత్॥ ౧౦౭॥

టీ॥ జీవాంఘ్రిపంచగుణితః = జ్యాయొక్క 4 వ భాగముచే (జ్యా $\frac{5}{4}$ చే) గుణింపబడిన, పరిధేః = పరిధియొక్క, వర్గః = వర్గము, వ్యాసాబ్ధిఘాతయుత మౌర్వికయా = 4 చే గుణింపబడిన వ్యాసముతో కలుపబడిన జ్యాచే, విభక్తః = భాగింపబడినదై చేయబడినది. లబ్ధోనితాత్ = లబ్ధముచే వ్యవకలింపబడిన,

పరిధివర్గచతుర్థభాగాత్ = పరిధివర్గముయొక్క నాలుగవభాగమువలన. ఆప్తే = పొందబడిన, పదే = వర్గమూలము, వృత్తదలాత్ = పరిధ్యర్ధమువలన, పతితే = వ్యవకలించ(నగు శేషము) ధనుః = చాపము, స్యాత్ = అగును.

186. (ప. పూర్వజ్యనుబట్టి చాపము తెలియుటకు. (పైపద్ధతికి వ్యతిరేకము)

(1) వ్యాసమును 4 చే గుణించి పూర్వజ్యయందు కలిపి దానిచే, పరిధివర్గమును జ్యాచేతను $\frac{5}{4}$ చేతను గుణింపగావచ్చు సంఖ్యను భాగింపుము.

(2) పరిధివర్గమును 4 చే భాగింపగావచ్చు సంఖ్యవలన లబ్ధమును వ్యవకలించి దానియొక్క వర్గమూలమును పరిధ్యర్ధమునకు వ్యవకలింపగా శేషము చాపమగును.

ఉపపత్తి: పైపద్ధతిచే $\frac{\text{4 వ్యా × అ}}{\frac{5\text{ప}^2}{4}\text{ — అ}}$ = జ్యా

కావున 4 వ్యా. అ = $\frac{5\text{ప}^2}{4}$ × జ్యా — జ్యా. అ

∴ అ (4 వ్యా + జ్యా) = ప$^2\frac{5}{4}$ × జ్యా

∴ అ = $\frac{\text{ప}^2\frac{5}{4}\text{ × జ్యా}}{\text{4 వ్యా + జ్యా}}$ = లబ్ధము, అగుచున్నది.

∵ అ = (ప — చా) చా = ప. చా — చా^{2} = ల ∴ చా^{2} — ప. చా = — ల

పక్షద్వయమునందును వర్గమును కలుపగా

చా^{2} — ప. చా + $(\frac{\text{ప}}{2})^2$ = $(\frac{\text{ప}}{2})^2$ — ల

∴ చా — $\frac{\text{ప}}{2}$ = $\sqrt{\frac{\text{ప}^2}{4}\text{ — ల}}$ = మూలము, ఋణ మగుచున్నది.

కావున చా = మూ — $\frac{\text{ప}}{2}$ అగుచున్నది.

ఉదాహరణమ్

విదితా ఇహ యే గుణా మయా తేషాం వద సుధునా ధనుర్మితిం।
యది తేఽస్తి ధనుర్గుణక్రియాగణితే గాణితికా కాఠిన్యపుణ్యం॥ ౯౮॥

న్యాసః. జ్యాః ౪౨, ౮౨, ౧౨౦, ౧౫౪, ౧౮౨, ౨౦౬, ౨౨౬, ౨౩౬, ౨౪౦ సపాదవ్యాసపరిధిః ౧౮ అత్రోక్తాని ధనూంషి ౧, ౨, ౩, ౪, ౫, ౬, ౭, ౮, ౯ ఏతాని పరిధ్యష్టాదశాంశేన గుణితాని వాస్తవాని స్యుః

ఇతి క్షేత్రవ్యవహారః.

[illegible]

[illegible] 42, 82, 120, 154, 184, 208, 226, 238, 240 [illegible] 18 [illegible] 240 [illegible] 930 [illegible] 1002 [illegible] 5 [illegible]
($324 \times \frac{1}{2} \times 5 = 162 \times 21 \times 5 = 17010$) [illegible] 17 [illegible] 1 [illegible]

187. ప్ర. [illegible]

(1) [illegible]

[illegible]

(2) [illegible]

[illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

[illegible] (183 ప్ర. [illegible])

[illegible]

$$\text{ముఖవ్యాసార్ధ}^2 = \text{శ}^2 + \text{శ} \times \left(\frac{\text{భూవ్యాసార్ధ}^2 - \text{ముఖవ్యాసార్ధ}^2}{\text{ఘ}} + \text{ఘ}\right)$$

ఇచట $\frac{\text{భూవ్యాసార్ధ}^2 - \text{ముఖవ్యాసార్ధ}^2}{\text{ఘ}} + \text{ఘ} = \frac{\text{వ్యాసార్ధవర్గాంతర}}{\text{ఘ}} + \text{ఘ} = \text{ఫ}$

$\therefore$ ముఖవ్యాసార్ధ^2 = శ^2 + శ.ఫ ఉభయపక్షములందు $(\frac{\text{ఫ}}{2})^2$ కలుప

$$\text{ముఖవ్యాసార్ధ}^2 + \left(\frac{\text{ఫ}}{2}\right)^2 = \text{శ}^2 + \text{శ.ఫ} + \left(\frac{\text{ఫ}}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\text{ముఖవ్యాసార్ధ}^2 + \left(\frac{\text{ఫ}}{2}\right)^2} = \text{శ} + \frac{\text{ఫ}}{2} \quad \therefore \text{శ} = \sqrt{\text{ముఖవ్యాసార్ధ}^2 + \left(\frac{\text{ఫ}}{2}\right)^2} - \frac{\text{ఫ}}{2}$$

ఇట్లు మూలశ్లోకమందలి యుక్తియున్నది.

(3) పై గోలఖండపు వృత్తఫలానయనమునకు

వ్యాస × (ఘ + శ) — (వ్యాస × శ) = వ్యాస × ఘ, అగుచున్నది.

సంపూర్ణవృత్తముచే పైన పైఖండముయొక్క ఫలము వ్యక్తపరచబడినది

(4) పరిధిచాపమునకు ఘ × వ్యా, ఫలముగా నుపపత్తి యెట్లనగా ?

ఈ త్రైరాశికముచే $\frac{\text{ప} \times \text{వ్యా} \times \text{చా}}{\text{ప}}$ = వ్యా × చా అగుచున్నది.

అభ్యాసము కొరకు ప్రశ్నములు.

(1) ఒకభూమి తూర్పున 750 లింకులు గలదు, దక్షిణమున 800 పశ్చిమమున 900 ఉత్తరమున 800 లింకులున్ను గలదు. ఆభూమియందు ఆగ్నేయమూలనుంచి వాయవ్యమూలమునకు కర్ణము 1060 లింకులు గలదు. అందలి వైశాల్యమెంత? ఎన్ని ఎకరములు ఎన్ని సెంట్లు ఉండును?

(2) ఒక చతుర్భుజముగల భూమియందు తూర్పు 800 దక్షిణమున ఒకభుజ 450 రెండవభుజ500 పశ్చిమమున 700 ఉత్తరమున 900, లింకులు, ఆగ్నేయమూలనుంచి నిర్ఋతిమూలమునకు కర్ణరేఖ 1100 లింకులు అటునుండి ఈశాన్యమూలమునకు కర్ణరేఖ 1200 లింకులు ఆభూమి యెంతయుండును ?

(3) 500 లింకులు చుట్టుకొలతగల వృత్తాకారముగల భూమికి వ్యాసమెంత? వైశాల్యమెంత ?

(4) 300 లింకులు వ్యాసముగల వృత్తాకారభూమికి పరిధియెంత? వైశాల్యమెంత ?

(5) 25000 మైళ్లు భూగోలముయొక్క చుట్టుకొలతయైనచో వ్యాసమెంత యుండును? పృష్ఠఫల మెంత? ఘనఫల మెంత ?

(6) వ్యాసము 6872 ప్రమాణముగల వృత్తమునందు 960 చాపమునందు పూర్ణజ్య ఎంత యుండును?

(7) 21 అంగుళములు వ్యాసముగల గోళమునందు 20 అంగుళములు పరిధి ప్రమాణముగల ఖండము చేసినచో అఖండమునందు ఖండించిన ఖండపు వృత్తమునకు పైన ఎత్తు(శరము) ఎంత?

(8) భూమి 120 ముఖము50 ఒకభుజ78 రెండవభుజ 104 ఒకకర్ణము 112 రెండవకర్ణము 126 ఇట్టి క్షేత్రమునందు లంబములు, సూచీక్షేత్రలంబము, కర్ణలగ్నమునుండి లంబము, వంశములు, కర్ణలంబములయోగమునుండి ఖండములు, చతుర్భుజఫలము, వీటిని చెప్పుము.

ఇది క్షేత్రవ్యవహారము 15వ ప్రకరణము.

ఖాతవ్యవహారము.

16వ ప్రకరణము.

అథ ఖాతవ్యవహారే కరణసూత్రం సార్ధార్యా.

గణయిత్వా విస్తారం బహుషు స్థానేషు తద్యుతిర్భాజ్యా ॥ ౧౧౬ ॥
స్థానకమిత్యా సమమితిరేవం దైర్ఘ్యే చ వేధే చ ॥
క్షేత్రఫలం వేధగుణం ఖాతే ఘనహస్తసంఖ్యా స్యాత్ ॥ ౧౧౭ ॥

టీ॥ విస్తారం = వెడల్పును, బహుషు = అనేకములైన, స్థానేషు = స్థానములందు, గణయిత్వా = కొలచి. తద్యుతిః = వాటియోగము, స్థానకమిత్యా = ఎన్నిస్థానములందు కొలచబడెనో ఆస్థానములసంఖ్యచే, భాజ్యా = భాగింపవలెను.

$$ముఖవ్యాసార్ధ^2 = శ^2 + శ \times \left(\frac{భూవ్యాసార్ధ^2 - ముఖవ్యాసార్ధ^2}{ఉ} + ఉ\right)$$

ఇచట $\frac{భూవ్యాసార్ధ^2 - ముఖవ్యాసార్ధ^2}{ఉ} + ఉ = \frac{వ్యాసార్ధవర్గాంతర}{ఉ} + ఉ = ఫ$

$\therefore$ ముఖవ్యాసార్ధ$^2 = శ^2 + శ.ఫ$ పక్షద్వయమునందు $(\frac{ఫ}{2})^2$ కలుపగ

$$ముఖవ్యాసార్ధ^2 + (\frac{ఫ}{2})^2 = శ^2 + శ.ఫ + (\frac{ఫ}{2})^2$$

$$\sqrt{ముఖవ్యాసార్ధ^2 + (\frac{ఫ}{2})^2} = శ + \frac{ఫ}{2} \therefore శ = \sqrt{ముఖవ్యాసార్ధ^2 + (\frac{ఫ}{2})^2} - \frac{ఫ}{2}$$

ఇట్లు మూలకారానయన యుక్తిన్ని యున్నది.

(3) పైగోలఖండపు పృష్ఠఫలానయనముచే

$వ్యా \times (ఉ + శ) - (వ్యా \times శ) = వ్యా \times ఉ$, అగుచున్నది.

సంపూర్ణవృత్తముచే పై ఖండముయొక్క ఫలము వ్యవకలించబడినది

(3) పరిధిచాపమునందు ప × వ్యా, ఫలమగునో వక్రభాగమెంతో ?

ఈ త్రైరాశికముచే $\frac{ప \times వ్యా \times చా}{ప} = వ్యా \times చా$ అగుచున్నది.

అభ్యాసము కొరకు ప్రశ్నములు.

(1) ఒకభూమి తూర్పున 750 లింకులు గలదు, దక్షిణమున 800 పశ్చిమమున 900 ఉత్తరమున 600 లింకులున్ను గలదు. ఆభూమియందు ఆగ్నేయమూలనుంచి వాయవ్యమూలమునకు కర్ణము 1060 లింకులు గలది. ఆందలి ఫలమెంత? ఎన్ని ఎకరములు ఎన్ని సెంట్లు యుండును?

(2) ఒక పంచభుజములుగల భూమియందు తూర్పు 800 దక్షిణమున ఒకభుజ 450 రెండవభుజ 500 పశ్చిమమున 700 ఉత్తరము 600, లింకులు. ఆగ్నేయమూలనుంచి నిరృతిమూలకు కర్ణరేఖ 1100 లింకులు అటనుండి ఈశాన్యమూలకు కర్ణరేఖ 1200 లింకులు ఆభూమి యెంతయుండును ?

(3) 500 లింకులు చుట్టుకొలతగల వృత్తభూమికి వ్యాసమెంత? ఫలమెంత ?

(4) 200 లింకులు వ్యాసముగల వృత్తాకారభూమికి పరిధియెంత? ఫలమెంత ?

(5) 25000 మైళ్లు భూగోలముయొక్క చుట్టుకొలతయగునో వ్యాసమెంత యుండును? పృష్ఠఫలమెంత? ఘనఫలమెంత ?

(6) వ్యాసము 6872 పరిమాణముగల వృత్తమునందు 960 బాణమునందు పూర్ణజ్య ఎంత యుండును?

(7) 21 అంగుళములు వ్యాసముగల గోలమునందు 20 అంగుళములు పరిధి పరిమాణముగల ఖండమును చేసినచో అఖండమునందు కీర్తింపబడును ఖండిత వృత్తమునకు సైన ఎత్తు(శరము) ఎంత?

(8) భూమి 120 ముఖము50 ఒకభుజ78 రెండవభుజ 104 ఒకకర్ణము 112 రెండవకర్ణము 126 ఇట్టి క్షేత్రమునందు లంబములు, సూచీక్షేత్రలంబము, కర్ణయోగమునుండి లంబము, శంకువులు, కర్ణఖండములు భాగములనుండి వాటిఖండములు, చతుర్భుజఫలము, వీటిని చెప్పుము.

ఇది క్షేత్రవ్యవహారము 15వ పరికరణము.

ఖాతవ్యవహారము.

16వ పరికరణము.

అథ ఖాతవ్యవహారే కరణసూత్రం వృత్తార్ధం.

గణయిత్వా విస్తారం బహుషు స్థానేషు తద్యుతి ర్భాజ్యా ॥ ౧౧౭ ॥

స్థానకమిత్యా సమమితి ర్లేవం దైర్ఘ్యేచ వేధేచ॥

క్షేత్రఫలం వేధగుణం ఖాతే ఘనహస్తసంఖ్యా స్యాత్ ॥ ౧౧౮ ॥

టీ॥ విస్తారం = వెడల్పును, బహుషు = అనేకములైన, స్థానేషు = స్థానములందు, గణయిత్వా = కొలచి, తద్యుతిః = వాటియోగము, స్థానకమిత్యా = ఎన్ని స్థానములందుకొలచబడెనో ఆస్థానములసంఖ్యచే, భాజ్యా = భాగింపవలెను

సమ. సమమితిః = సమమగు విస్తారపరిమాణము (అగును.) ఏవం = ఈప్రకారముగ, దైర్ఘ్యే చ — పొడవునందును, వేధే చ — లోతునందును (సమమితి యగును)

క్షేత్రఫలం = క్షేత్రఫలము, వేధగుణం = వేధచే గుణింపబడినదై, ఖాతే = ఖాతమందు, ఘనహస్తసంఖ్యా = ఘనహస్తముల సంఖ్య, స్యాత్ = అగును.

188. వ్యా. (1) ఖాతముయొక్క క్రిందిమీది పరిమాణము, ఆ క్రిందిపరిమాణము అడుగునుండి పైవరకును ఒకేవిధముగ నున్నచో (పొడవు, వెడల్పు సమముగ నున్నచో) ఆ క్షేత్రఫలమును లోతు (వేధ)చే గుణించిన ఘనఫలమగును.

(2) అట్లుగాక ఆ విస్తార దైర్ఘ్యములు క్రింది భాగమందును నడుమను మధ్యమందును పైభాగమందును క్రమముగ హెచ్చుతగ్గులుగ నున్నచో ఆఖాతముయొక్క ఘనఫలము తెలియు పద్ధతి చెప్పబడుచున్నది.

(3) ఎక్కువతక్కువలుగ ఎన్నిస్థానములందు గలవో అన్నిస్థానములయందుగల వెడల్పులన్ని పొడవులన్ని వేరుగ గణింపవలెను. అన్ని వెడల్పులను అన్ని పొడవులను వేర్వేర కలుపవలెను. ఆస్థానముల సంఖ్యచే ఆ మొత్తములను భాగింపవలెను. అవి సమమితి యగుచున్నవి. సమకొలతలు కలిసి స్థాన సంఖ్యచే భాగింపవలెను. అప్పుడు క్షేత్రఫలము తెలియును

(4) ఆ క్షేత్రఫలమును వేధచే గుణింపగా ఘనఫల మగును.

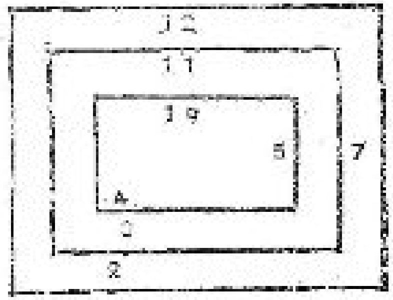
(5) ఆవేధలు 2, 3 విధములుగ నున్నచో వాటియొక్క యోగమును స్థానసంఖ్యచే భాగించి దానిచే గుణింపవలెను. అది ఘనఫలము.

ఉదాహరణమ్

భుజవక్రతయా దైర్ఘ్యం దశేశార్కకరైర్మితం।
త్రిషు స్థానేషు షట్పంచ సప్తహస్తా చ విస్తృతిః॥ ౧౮౯॥
యస్య ఖాతస్య వేధోఽపి ద్విత్రిచతుష్కరః సఖే।
తత్ర ఖాతే కియంతస్స్యుర్ఘనహస్తాః ప్రచక్ష్వ మే॥ ౧౯౦॥

న్యాసః. అత్ర సమమితికరణేన విస్తారే హస్తాః ౬ దైర్ఘ్యే ౧౧ వేధే చ ౩ లబ్ధా ఘనహస్తసంఖ్యా ౧౯౮

తా॥ ఒకానొక ఖాతము పక్కలయందు వంకరలుగలదై పొడవు వెడల్పు విస్తారములు ఒకేవిధముగ లేవని యున్నవి. అట్టి ఖాతమునందు క్రిందిభాగమునందు పొడవు 10 హస్తములు, మధ్యయందు 11 హస్తములు, పైభాగమున 12 హస్తములు అట్లు వెడల్పు క్రిందిభాగమున 5 హస్తములు, మధ్యమందు 6 హస్తములు, పైభాగమందు 7 హస్తములును గలిగియున్నది. లోతైనను ఒకచో 2 హస్తములు మరి యొకచో 3 హస్తములు మరియొక చోట 4 హస్తములుగను గలదు. ఆఖాతక్షేత్ర మందు ఘనహస్తము లెన్ని యగును? చెప్పుము.



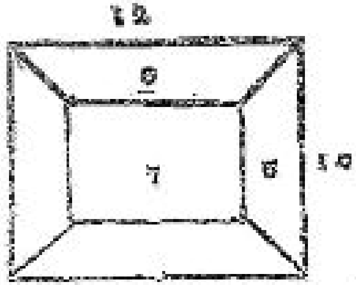
పొడవులను స్థానములందు గలవి కలుప 10 + 11 + 12 = 33 స్థానసంఖ్య 3 చే భాగింప 11 ఇట్లు వెడల్పులను కలుప 5 + 6 + 7 = 18 దీనిని స్థాన సంఖ్య 3 చే భాగింప 6 ఇట్లు వేధలు కలుప 4 + 3 + 2 = 9 స్థాన సంఖ్యచే భాగింప 3 ఇది సమమితి యగు ఖాతము గాన క్షేత్రఫలము 6 × 11 = 66 అగుచున్నది. దీనిని వేధయగు 3 చే గుణింప 198 ఘనఫలమగుచున్నది.

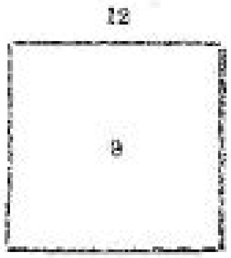
ఉపపత్తి. దైర్ఘ్యములను సంఖ్యలన్నిటిని కలిపి సంఖ్యల సంఖ్యచే భాగింప మధ్యమమగును అని సిద్ధము. అట్లు మధ్యమమగుచో దైర్ఘ్య విస్తారములను వేధయును తెలిసి వానిచే ఫలము తెలియును.

ఖాతాంతరే కరణసూత్రం సార్ధవృత్తం.

ముఖజతలజతద్యుతిజక్షేత్రఫలైక్యం హృతం షడ్భిః।
క్షేత్రఫలం సమమేవం వేధగుణం ఘనఫలం స్పష్టం॥ ౧౯౧॥
సమఖాతఫలత్ర్యంశః సూచీఖాతే ఫలం భవతి॥

టీ॥ ముఖజ తలజ తద్యుతిజ క్షేత్రఫలైక్యం = ముఖభాగమందున్నట్టియు క్రిందిభాగమందున్నట్టియు వాటియోగమువలన నున్నట్టియు క్షేత్రఫలముల యోగము





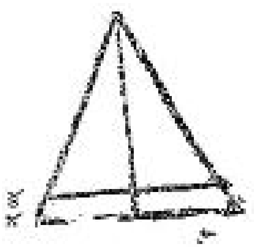


[illegible] 10 ను 22 చే గుణించి 7 చే [illegible] 10 చే [illegible] 4 చే భాగింప $\frac{220 \times 10}{7 \times 4} = \frac{550}{7}$ [illegible] $\frac{550 \times 5}{7} = \frac{2750}{7}$ [illegible] 3 చే భాగింప $\frac{2750}{7 \times 3} = \frac{2750}{21}$ [illegible]

[illegible] $\frac{3937}{10}$ [illegible]

$\frac{1309}{10}$ [illegible]

[illegible]



[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{\text{చే}}{\text{భ}}$ [illegible]

[illegible] $\frac{(\text{త}—\text{ము})\,\text{అ}}{\text{వ}}$ [illegible] $\frac{(\text{త}—\text{ము})\,\text{అ}2}{\text{వ}}$ [illegible]

[illegible]

$\frac{(\text{త}-\text{ము})\,\text{అ}}{\text{ వే}}$ ఫ అనుకొనుచో ఫ, 2ఫ, 3ఫ, 4ఫ ...... $\frac{\text{వే}}{\text{అ}}$ ఫ అగుచున్నవి.

[illegible] $(\text{ము}+\text{ఫ}), (\text{ము}+2\text{ఫ}), (\text{ము}+3\text{ఫ})$ ...... [illegible]

క్షేత్రఫలములు $= (\text{ము}+\text{ఫ})^2, (\text{ము}+2\text{ఫ})^2, (\text{ము}+3\text{ఫ})^2$, ఇత్యాది........

$= \text{ము}^2 + 2\text{ముఫ} + \text{ఫ}^2$
$\text{ము}^2 + 4\text{ముఫ} + \text{ఫ}^2 4$
$\text{ము}^2 + 6\text{ముఫ} + \text{ఫ}^2 9$
ఇత్యాది.

[illegible]

[illegible] $\frac{\text{ము}^2 \times \text{వే}}{\text{అ}}$ అగుచున్నవి. [illegible]

[illegible]

$\therefore \{(\text{ము}+\text{ఫ})^2 + (\text{ము}+2\text{ఫ})^2 + (\text{ము}+3\text{ఫ})^2 + \cdots\}$

$= \frac{\text{ము}^2.\text{వే}}{\text{అ}} + \text{ము}.\text{ఫ}\frac{(\text{వే}+\text{అ})\text{వే}}{\text{అ}^2} + \text{ఫ}^2\frac{(\text{వే}^2 2+\text{వేఅ}3+\text{అ}^2)\text{వే}}{6\text{అ}^3}$ [illegible]

[illegible]

$= \text{ము}^2.\text{వే} + \frac{\text{ము}.\text{ఫ}(\text{వే}+\text{అ})\text{వే}}{\text{అ}} + \frac{\text{ఫ}^2(2\text{వే}^2+3\text{వే}.\text{అ}+\text{అ}^2)\text{వే}}{6\text{అ}^2}$ = [illegible]

$\because \text{ఫ} = \frac{(\text{త}-\text{ము})\text{అ}}{\text{వే}} \quad \therefore \text{ఫ}^2 = \frac{(\text{త}-\text{ము})^2\text{అ}^2}{\text{వే}^2}$ [illegible]

$= \text{ము}^2\,\text{వే} + \text{ము}(\text{వే}+\text{అ})(\text{త}-\text{ము}) + \frac{(\text{త}-\text{ము})^2 \times (2\text{వే}^2+3\text{వేఅ}+\text{అ}^2)}{6\text{వే}}$

$= \text{ము}^2.\text{వే} + \text{ము}(\text{వే}+\text{అ})(\text{త}-\text{ము}) + (\text{త}-\text{ము})^2 \times \left\{\frac{2\text{వే}+3\text{అ}+\frac{\text{అ}^2}{\text{వే}}}{6}\right\}$

[illegible] అ = 0 అనుకొనుచో $(3\,\text{అ} + \frac{\text{అ}^2}{\text{వే}}) = 0$

$\therefore \text{ము}^2.\text{వే} + (\text{త}-\text{ము})\,\text{ము}.\text{వే} + \frac{(\text{త}-\text{ము})^2\,\text{వే}}{3}$ = [illegible]

$= \left\{\text{ము}^2 + \text{ముత} - \text{ము}^2 + \frac{\text{త}^2+\text{ము}^2-2\text{ముత}}{3}\right\}\text{వే} = (\text{త}^2+\text{ము}^2+\text{ముత})\frac{\text{వే}}{3}$

$= (2\text{త}^2 + 2\text{ము}^2 + 2\text{ముత})\frac{\text{వే}}{6} = \left\{\text{త}^2+\text{ము}^2+(\text{త}+\text{ము})^2\right\}\frac{\text{వే}}{6}$

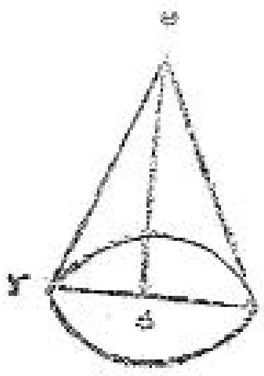
[illegible]

$\left\{\text{త}^2+\text{ము}^2+(\text{త}+\text{ము})^2\right\} \times \frac{\text{వే}}{6}$ అగుచున్నది.

[illegible] ము = 0 అనుకొనుచో

$\left\{\text{త}^2+\text{ము}+(\text{త}^2+\text{ము})^2\right\} \times \frac{\text{వే}}{6} = \frac{2\text{త}^2 \times \text{వే}}{6} = \frac{\text{త}^2 \times \text{వే}}{3} = \frac{\text{క్షేత్రఫల} \times \text{వేధ}}{3}$

[illegible]



ఇచట అ౨ — భుజక్షేత్రఫల = భూమ [illegible] మునందలి పై భాగమున నైన క్షేత్రఫలము కావున వృత్తక్షేత్రఫలమును [illegible] ఆచే గుణించి ౩చే భాగించిన వృత్తక్షేత్ర ఘనఫలము వచ్చునని స్పష్టము.

సూచీ పృష్ఠఫలము.

190. ప్ర. [illegible] త్రిభుజమునందు కోటిని స్థిరముగ చేసి త్రిభుజక్షేత్రము గోళకమును త్రిప్పుటచే కలుగు సూచి ఘనాకారము అనియు చెప్పబడుచున్నది.

పై క్షేత్రమునందు అచక జాత్యము అచ కోటి; చక భుజ, అక కర్ణము. అచ కోటి కదల కుండునట్లు క [illegible] త్రిప్పుటచే కచ భుజ వ్యాసార్ధముగ గల వృత్తము [illegible] భాగమున ఏర్పడుచున్నది [illegible] సూచీకారము ఏర్పడినది. అట్టి సూచీక్షేత్రమునందు పృష్ఠఫలము [illegible]

[illegible]

[illegible]

ఉపపత్తి: [illegible] సూచీ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

చేయుటచే ఆ నేక త్రిభుజములగుచున్నవి. [illegible] ఆ నే కమునందు [illegible] భాగము లగుచున్నవి. [illegible] త్రిభుజమునందును పరిధియొక్క [illegible] భాగము భూమి. [illegible] సరళరేఖా [illegible] లంబమున్న [illegible] కావున అట్టి ప్రత్యేక త్రిభుజఫలమును పొందిన దానిని పరిధివిభాగ (లేక త్రిభుజ) సంఖ్యచే గుణించిన ఆకారమునందలి మొత్తము క్షేత్రఫలము అగును.

పరిధిని 'బ' సంఖ్యగల భాగములుగ చేసిన [illegible]

$\frac{\text{ప}}{\text{బ}}$ — భూమి యగుచున్నది. 'బ' సంఖ్యగల త్రిభుజము లగును.

$\therefore \frac{\text{లం} \times \text{భూ}}{2} = \frac{\text{అక} \times \text{ప}}{\text{బ} \times 2}$ దీనిని త్రిభుజసంఖ్య (బ)చే గుణించిన $\frac{\text{అక} \times \text{ప}}{2}$

ఇచట అక $= \sqrt{\text{కచ}^2 + \text{అచ}^2} = \sqrt{\left(\frac{\text{వ్యా}}{2}\right)^2 + \text{వే}^2}$

$\therefore \frac{\sqrt{\left(\frac{\text{వ్యా}}{2}\right)^2 + \text{వే}^2} \times \text{ప}}{2}$ = సూచీపృష్ఠఫలము.

కావున అర్ధవ్యాసముయొక్కయు [illegible] వర్గయోగమూలమును అర్ధవ్యాసముచే గుణించి ౨చే భాగించిన సూచీపృష్ఠఫలము అని చెప్పబడినది.

ఇది క్షేత్రవ్యవహారము 16 ప్రకరణము.

చితివ్యవహారము.

17 ప్రకరణము.

చితౌ కరణసూత్రం సార్ధవృత్తం.

ఉచ్ఛ్రయేణగుణితంచితేఃకిల క్షేత్రసంభవఫలంఘనంభవేత్ ॥ ౧౧౯ ॥
ఇష్టికాఘనహృతేఘనేచితే రిష్టికాపరిమితిశ్చలభ్యతే॥ ౧౨౦॥
ఇష్టికోచ్ఛ్రితిహృదుచ్ఛ్రితిశ్చితేః స్యుస్తరాశ్చదృషదాంచితేరపి॥

టీ॥ చితేః = (ఇటుకల రాశి) మొదలగువానియొక్క చెప్పఁబడినటువంటి) గట్టుయొక్క క్షేత్రసంభవఫలం = క్షేత్రఫలము, ఉచ్ఛ్రితిఘ్నం = ఎత్తుచే, గుణితం = గుణింపబడినదై, ఘనం = ఘనఫలము, భవేత్ = అగుచున్నది. చితేః = గట్టుయొక్క, ఘనే = ఘనఫలము, ఇష్టికాఘనహృతే = ఇటుకయొక్క ఘనముచే భాగింపబడినదై, ఇష్టికామితిః = ఇటుకలసంఖ్యయగుచున్నది. ఉచ్ఛ్రితే = ఎత్తున్నది. చితేః = గట్టుయొక్క, ఉచ్ఛ్రితిః = పొడుగుత్వము, ఇష్టికోచ్ఛ్రితిహృత్ = ఇటుకయొక్క పొడుగుత్వముచే భాగింపబడినదై, స్తరాః = వరుసలు, స్యుః = అగును. దృషదాం = రాళ్లయొక్క, చితేరపి = గట్టుయొక్కయు, స్తరాః = వరుసలు, స్యుః = అగును.

191. వ్యా. చెప్పఁబడిన సమపరిమాణముగల ఇటుకలు, అట్టి రాళ్లు, వానిచేనైన గట్టు (చేక అను) యొక్క ఘనపరిమాణమును తెలిసికొని వానిచే ఆ రాశియందు ఎన్ని వరుసలున్నవియో ఎన్ని ఇటుకలున్నవియో చెప్పుట:

(1) ఇటుకరాశియొక్క పొడవును వెడల్పును తెలిసికొని క్షేత్రఫలము గనుగొనుము.

(2) ఆ క్షేత్రఫలమును ఎత్తుచే గుణింప ఘనఫలము.

(3) అట్లు ఒక ఇటుకను ప్రత్యేకముగ ఘనపరిమాణమును తెలిసికొనుము.

(4) ఒక ఇటుకయొక్క ఘనపరిమాణముచే ఆ రాశియొక్క ఘనపరిమాణమును భాగించినచో ఆ రాశియందలి ఇటుకల సంఖ్య అగును.

(5) ఒక ఇటుకయెత్తుచే రాశియొక్క ఎత్తును భాగించినచో ఆ రాశియొక్క వరుస (వరుసలు) అగును.

(6) ఇట్లు రాళ్లగట్టునందును చేయవలయును.

ఇది సరిగా (ఏకరూపమునకు [illegible]) చెప్పఁబడిన [illegible] ఉపయోగించును.

ఉదాహరణమ్

అష్టాదశాంగులం దైర్ఘ్యం విస్తారో ద్వాదశాంగులః।
ఉచ్ఛ్రితిస్త్ర్యంగులా యస్యా ఇష్టికాస్తాశ్చితౌ కిల॥

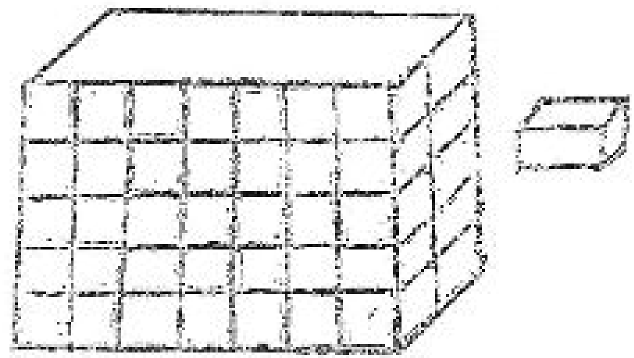
యద్విస్తృతిః పంచకరాష్టహస్తం దైర్ఘ్యం చ యస్యాం త్రికరోచ్ఛ్రితిశ్చ।
తస్యాం చితౌ కింఫలమిష్టికానాం సంఖ్యా చ కా బ్రూహి కతి స్తరాశ్చ॥౧౦౦

తా॥ ఒక ఇటుకయొక్క పొడవు 18 అంగుళములు వెడల్పు అం 12 లు ఎత్తు అం 3 లు అట్టి ఇటుకలు ఒకవరుసగ పేర్చఁబడినవి. అదియే చితి అనఁబడును.

ఈ చితియొక్క వెడల్పు 5 హస్తములు పొడవు హ 8 లు ఎత్తు హ 3 లు ఆ చితియందు ఘనఫలమెంత? ఇటుకలెన్ని? వరుసలెన్ని?

న్యాసః ఇష్టికాఘనహస్తమానం $\frac{3}{64}$ చితేః క్షేత్రఫలం ౪౦ ఘనహస్తాః ౧౨౦ లబ్ధా ఇష్టికాసంఖ్యా ౨౫౬౦ స్తరసంఖ్యా ౨౪ ఏవం పాషాణచయేఽపి.

ఇతి చితివ్యవహారః.



ఇటుకయొక్క కొలతలు అంగుళములలో నియ్యఁబడినవి. ఆను (చయము) యొక్క కొలతలు హస్తములలో నియ్యఁబడినవి. కావున రెండును ఒకజాతివి యగుటకై ఇటుకయొక్క ఘనపరిమాణమును హస్తములలోనికి మార్చవలయును. ఒక ఘనహస్తమునకు ఘనాంగుళములు 13824; ఇటుకయొక్క ఘనాంగుళములు $18 \times 12 \times 3 = 648$ కావున $\frac{648}{13824} = \frac{3}{64}$ ఇది ఇటుకయొక్క ఘనహస్తపరిమాణ మగుచున్నది.

ఘనముయొక్క ఘనహస్తములు 5 × 8 × 3 = 120 దీనిని ఇష్టికా ఘనహస్తపరిమాణము $\frac{3}{64}$ చే భాగించగా $\frac{120}{1} \div \frac{3}{64} = \frac{120}{1} \times \frac{64}{3} = 64 \times 40 = 2560$ ఇటుకలు.

ఘనముయొక్క ఎత్తు హ 3 లు = 72 అంగుళములు ఇష్టికయొక్క ఘనాంగుళములు 3 చే భాగింప $\frac{72}{3}$ = 24 వరుసలు అగుచున్నవి, ఇట్లు గాతిగట్టినందును తెలియవలెను.

ఉపపత్తి: పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు వీటి గుణనము ఘనమగుట పరిభాషచే సిద్ధమని విదితము. వరుసలును ఇటుకలును త్రైరాశికముచే తెలియుకొనబడినవి.

ఇతి చిత్యవ్యవహారము 17 వ ప్రకరణము.

క్రకచవ్యవహారము.

18వ ప్రకరణము.

అథ క్రకచవ్యవహారే కరణసూత్రం

పిండయోగదలమగ్రమూలయో ర్దైర్ఘ్యసంగుణితమంగులాత్మకం;
దారుదారణపథైస్సమాహతం షట్స్వరేషువిహృతం కరాత్మకం॥

టీ॥ అగ్రమూలయోః = అగ్రమందును మొదటియందును ఉన్న. అంగులాత్మకం = అంగుళములరూపమగు. పిండయోగదలం = వెడల్పులయొక్క మొత్తములో సగము, దైర్ఘ్యసంగుణితం = (అంగుళాత్మకమగు) పొడవుచే గుణింపబడినదియై, దారుదారణపథైః = కఱ్ఱయొక్క కోతయందలి మార్గములచే, సమాహతం = గుణింపబడినదియై, షట్స్వరేషువిహృతం = 576చే భాగింపబడినదై, కరాత్మకం = హస్తాత్మకమగు గణితమగుచున్నది.

192. ప్ర. ఇంతే చతురశ్రపరిమాణము (గజము హస్తము అడుగు మొదలగునవి) గల ఇంతపొడవైన నలుచదరము ఇయ్యబడినట్లు నిర్ణయించి కోయబడిన రంపపుకోతలందు ఎన్ని చతురశ్రగజములు మొదలగునవి అయినవియు తెలిసికొను పద్ధతి చెప్పబడుచున్నది.

(1) కోయబడిన కఱ్ఱయొక్క మొదటను కొనను గల వెడల్పు వేరువేరుగ తెలిసికొని రెండిటిని కలిపి అర్ధింపుము. దానిని పొడవుచే గుణింపుము. అఫలమును కోతలసంఖ్యచే గుణింపుము.

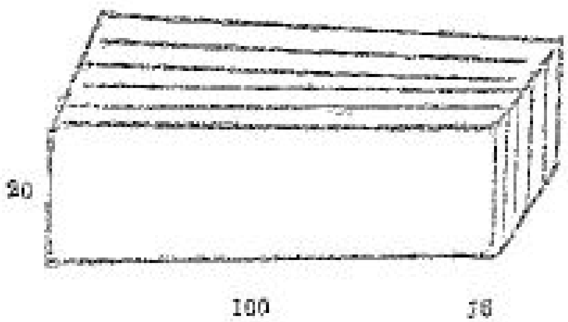
(2) వెడల్పును పొడవును అంగుళము లయినచో పూర్వగుణనఫలమును 576చే భాగింప హస్తాత్మకమగు ఫలమగును. 144 చే భాగింప అడుగులగునదియగును.

ఉదాహరణమ్.

మూలే నఖాంగులమితోఽథ నృపాంగులోఽగ్రే పిండః శ్రుతాంగులమితం కిల యస్య దైర్ఘ్యం। తద్దారుదారణపథేషు చతుర్షు కిం స్యాద్ధస్తాత్మకం వద సఖే గణితం ద్రుతం మే॥ ౧౦౧॥

తా॥ ఒక కఱ్ఱకు మొదట వెడల్పు 20 అంగుళములు, కొనను అం 16 లు వెడల్పు, పొడవు అం 100 లు అకఱ్ఱకు పొడవుగ 4 రంపపుకోతలు కోయునో హస్తములచే ఎంత చతురశ్రమగు ఫలితమును మిత్రమా నాకు శీఘ్రముగ చెప్పుము.

న్యాసః. పిండయోగదలం ౧౮ దైర్ఘ్యేణ ౧౦౦ సంగుణితం ౧౮౦౦ మార్గ ౪ గుణితం ౭౨౦౦ షట్స్వరేషు ౫౭౬. విహృతం జాతం కరాత్మకం గణితం $\frac{౨౫}{౨}$



ఈ కఱ్ఱయొక్క మొదట వెడల్పు అనగా ఎత్తు 20 అంగుళములు, కొనను వెడల్పు 16 అంగుళములు, పొడవు 100 అంగుళములు. 4 కోతలు పొడవుగ కోయునచో 5 ముక్కలు కాగలవు. అట్టి ముక్కలు 5 గనుక రంపముచే కోయబడినవి 4 కోతలచే కాబడిన తలములయొక్కయు ఒకవైపు చతురశ్రముల మొత్తము ఈ గణితముచే వచ్చుచున్నది.

మొదటికొసను 20 తుదికొసను 16 అంగుళము లైనచో మధ్యమము $\frac{20+16}{2}=18$

పొడవు 100చే గుణింప 1800 ఇది ఒక్కొక్క కోతయొక్క వైశాల్య మగు చున్నది. దీనిని 4చే (కోతలసంఖ్యచే) గుణింప 7200 చదరపు [illegible] అంగుళములు. హస్తముయొక్క వర్గము $24^2=576$ చే భాగింప $\frac{7200}{576}=12\frac{1}{2}$ చదరపు హస్తము లగుచున్నవి. ఒక్కొక్క చదరపుహస్తమునకు [illegible] ద్రవ్యమును ఈహస్తసంఖ్యచే గుణింప ఇవ్వదగిన ధనమగును.

దీనియుపపత్తి స్పష్టముగ తెలియుచున్నది.

తిర్యక్ఛేదే కరణసూత్రం సార్ధవృత్తమ్

ఛిద్యతే తు యది తిర్యగుక్తవత్ పిండవిస్తృతిహతేః ఫలం తదా॥

టీ॥ తిర్యక్ = అడ్డముగా, ఛిద్యతేయది = కోయబడినచో, తదా = అప్పుడు, ఉక్తవత్ = చెప్పబడినప్రకారము, పిండవిస్తృతిహతేః = వెడల్పుయొక్కయు పొడవుయొక్కయు గుణకారమువలన, ఫలం = ఫలమగును.

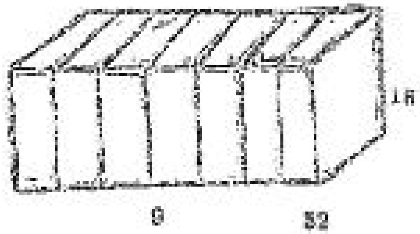
198. వ్రా. అట్లు కొయ్యనడ్డముగ కోయవలసినచో వెడల్పును ఎత్తును గుణించి కోతలసంఖ్యచే గుణింప ఫలమగును; అంగుళముల [illegible] ఫలమును 576చే భాగింప హస్తాత్మకమగును.

[illegible] ఎత్తు; [illegible] అడ్డముగ కోతలు [illegible]

ఉదాహరణమ్

యద్వ్యాసస్తుంగహస్తాంగులానాం పిండః పంచ [illegible] యత్ర కాష్ఠే ఛేదేషు తిర్యఙ్నవసు ప్రచక్ష్వ కిం స్యాత్ఫలం తత్ర కరాత్మకం మే ॥౨౨॥

న్యాసః విస్తారః 32 పిండః 16 మార్గాః 9 ఫలం హస్తాః.



కర్రయొక్క ఎత్తు (వెడల్పు) 16 అంగుళములు, పొడవు 32 అంగుళములు, అడ్డముగ 9 కోతలు కోయబడినచో, అచట హస్తాత్మకమగు ఫలమెంతయగును?

$16\times32\times9=4608$ [illegible]

$4608\div576=8$ చదరపు హస్తములు. ఇది ఫలము అగుచున్నది.

ఇష్టికాచితి దృషచ్చితి ఖాత క్రాకచ వ్యవహృతౌ ఖలు మూల్యం।
కర్మకారజన సంప్రతిపత్త్యా తన్మృదుత్వ కఠినత్వ వశేన॥ ౧౨౩॥

ఇతి క్రకచ వ్యవహారః.

టీ॥ ఇటుకలపట్టు, రాతిపట్టు, రాతియొక్కయు [illegible]; (క్రకచ — రంపము) రంపపు కోతలు [illegible] [illegible]

ఇది క్రకచవ్యవహారము 18 ప్రకరణము.

రాశివ్యవహారము.

౹౨వ ప్రకరణము.

అథ రాశి వ్యవహారే కరణసూత్రం వృత్తం.

అనణుషు దశహస్తాంశోఽణు ధాన్యేషు పూర్వః పరిధినవమభాగ
శ్శూకధాన్యేషు వేధః। భవతి పరిధిషష్ఠే వర్గితే వేధనిఘ్నే। ఘన
గణితకరాస్స్యుర్మాగధాస్తాశ్చ ఖార్యః॥ ౧౯౪॥

టీ: అనణుషు = స్థూలధాన్యములందు. దశమాంశః = పరిధియొక్క పదియవ భాగము, అథ = పిమ్మట, అణుషు = అణుధాన్యములందు ఏకాదశాంశః = 11వ వంతు, శూకధాన్యేషు = శూక (ముల్లుగల) ధాన్యములందు, పరిధినవమభాగః = పరిధియొక్క 9వ వంతు, వేధః = వేధ (ఎత్తు) భవతి = అగుచున్నది.

పరిధిషష్ఠే = పరిధియొక్క 6వ వంతు, వర్గితే = వర్గించబడి, వేధనిఘ్నే = వేధచేత గుణింపబడినదగుచో, ఘనగణితకరాః = ఘనఫలముయొక్క హస్తములు, స్యుః = అగుచున్నవి. తాః = ఆ హస్తములు, మాగధాః = మగధదేశపు, ఖార్యః = ఖారికలు.

194. ప్ర. (1) ధాన్యములను పోసిన ఏర్పడుచున్న రాశి ఎత్తు వేధ యనబడు. దానిని వడ్లు మొదలగు స్థూలధాన్యముల రాశియందు పరిధిలో 10వ వంతు అగును; సూక్ష్మధాన్యములు అనగా రాగులు మొదలగు కొర్రలు మొదలగు వాటి రాశియందు పరిధిలో 11వ వంతు వేధ యగును; ముల్లువంటి అగ్రములుగల ధాన్యముల రాశియందు పరిధియొక్క 9వ వంతు వేధయగును. (ఇది సామాన్యముగ చెప్పబడినది కావున ఎత్తును కొలతచే తెలుసుకొనుట యుక్తము.)

(2) (పరిధియొక్క) పరిధియొక్క 6వవంతును వర్గించి (పరిధియొక్క) వేధచే గుణించిన ఘనహస్తము లగును. అవి మగధదేశపు ఖారికలు అగును.

(సమభూమియందు గాని ఘనపుటాకృతి ధాన్యరాశి ఉండ బట్టుటవలన తత్సమానముచే తెలిసికొనవలెను. పరిధిభేదము లేకున్న విధముగ ఘనఫలములగును.)

ఉపపత్తి: స్థూలపద్ధతిచే వ్యాసము త్రిభుజాకారము క్షేత్రఫలము
$\frac{ప}{౬} \times \frac{ప}{౬} = \frac{ప^2}{౩౬}$ దీనిని వేధచే గుణించి ౩చే భాగించిన సూచీఘనఫలము (188 ప్రకరణము)
$\frac{ప^2 \times వే}{12 \times 3} = \frac{ప^2}{36} \times వే = (\frac{ప}{౬})^2 \times వే$ ఇట్లు పద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది.

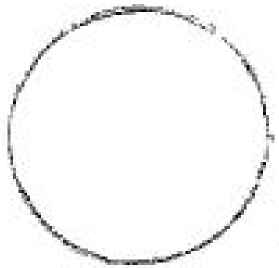
ఇందు స్థూలవ్యాసము అగుట స్థూలమార్గమగుటచే ఇంచుమించుగ ఘనఫలము లగును. అని గ్రహింపవలయును.

ఉదాహరణమ్

సమభువి కిల రాశిర్యః స్థితః స్థూలధాన్యైః పరిధిపరిమితిస్స్యా
ద్ధస్తషష్టిః ప్రజాతా। ప్రవద గణక ఖార్యః కిం మితాస్స్యుస్తస్మిన్
నథ పృథగణుధాన్యైః శూకధాన్యైః కృతేఽస్మిన్॥ ౧౯౫॥

న్యాసః. స్థూలధాన్యపరిధిః ౬౦ వేధః ౬ లబ్ధాః ఖార్యః ౬౦౦
అథాణుధాన్యరాశివేధః $\frac{౬౦}{౧౧}$ జాతం ఫలం ౫౪౫ $\frac{౫}{౧౧}$ అథ శూక
ధాన్యపరిధిః ౬౦ వేధః $\frac{౨౦}{౩}$ లబ్ధాః ఖార్యః ౬౬౬ $\frac{౨}{౩}$

తా॥ గణకుడా! సమభూమియందున్న స్థూలధాన్యరాశియొక్క పరిధి 60 హస్తములు, ఆరాశియందు ఎన్ని ఖారికలు గలవు? చెప్పుము.
అట్టి పరిధిగలరాశి అణుధాన్యమునకో ఎన్ని ఖారికలు?
శూకధాన్యమునకో ఎన్ని ఖారికలు? క్రమముగ వేర్వేరు చెప్పుము.



60 పరిధిప్రమాణముగల రాశి స్థూలధాన్యమునకో $\frac{60}{10} = 6$ వేధ యగును, కావున $(\frac{60}{6})^2 \times 6 = 100 \times 6 = 600$ ఘనహస్తములు. ఆరాశి అణుధాన్యమునకో $\frac{60}{11}$ వేధ యగును. కావున $100 \times \frac{60}{11} = \frac{6000}{11} = 545\frac{5}{11}$ ఘనహస్తములు. ఆరాశి శూకధాన్యరాశి యగునో $\frac{60}{9} = \frac{20}{3}$ వేధయగుచున్నది. కావున

$$\left(\frac{60}{6}\right)^2 \times \frac{20}{3} = \frac{100 \times 20}{3} = 666\frac{2}{3}$$ ఘనహస్తము లగును.

అథ భిత్త్యంతర్బాహ్యకోణసంలగ్నరాశిపరిమాణానయనే
కరణసూత్రం వృత్తార్ధం.

ద్వి వేద సత్రిభాగైక నిఘ్నాత్తు పరిధేః ఫలాత్ ।
భిత్త్యంతర్బాహ్య కోణస్థ రాశేః స్వగుణభాజితం ॥౧౦౩॥

టీ॥ భిత్త్యంతర్బాహ్యకోణస్థరాశేః = గోడయందును లోపలిమూలయందు ను, వెలుపలిమూలయందును, ఉన్న రాశియొక్క, ద్వివేదసత్రిభాగైకనిఘ్నాత్ = 2, 4, 4/3, చేత గుణింపబడిన, పరిధేః = పరిధివలననైన, ఫలం = ఫలము, స్వగుణభాజితం = వానివానిగుణకములచే భాగించుమని భావము (తెలియవలెను)

195. ప్ర. (1) ఒకగోడయొద్ద పోసియున్నరాశియొక్క చుట్టు కొలతను 2చే గుణించి అనపరిధివలన పూర్ణరాశిఘనము సాధించి దానిని 2చే భాగించిన ఘనహస్తము లగును.

(2) లోపలికోణముయొక్క రెండుగోడలమూలయందు పోసిన రాశియొక్క పరిధిని 4చే గుణించి దానివలననైన ఘనహస్తసంఖ్యను 4చే భాగింపవలెను.

(3) వెలుపలికోణముయొక్క రెండువైపులనున్న మూలయందున్న రాశియొక్క పరిధిని 4/3చే గుణించిన వచ్చు పరిధివలననైన ఫలమును 4/3చే భాగింపవలెను. అవి ఘనహస్తము లగును.

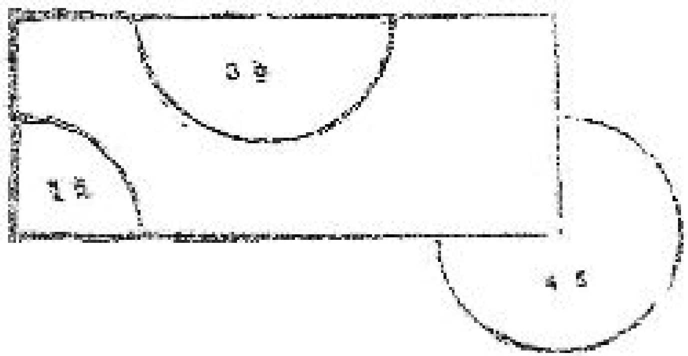
ఉదాహరణం

పరిధిః భిత్తిలగ్నస్య రాశేః త్రింశత్కరాః కిల ।
అంతఃకోణస్థితస్యాపి తిథితుల్యకరః స్మృతః ॥ ౧౦౪ ॥
బహిఃకోణస్థిత స్యాపి పంచఘ్ననవసంమితః ।
తేషామాచక్ష్వ మే క్షిప్రం ఘనహస్తాన్పృథక్పృథక్ ॥ ౧౦౫ ॥

తా॥ ఒకగోడను చేర్చి పోయబడిన ధాన్యరాశియొక్క పరిధి 30 హస్తములు, లోపలిమూలయందున్న ధాన్యరాశియొక్క పరిధి 15 హస్తములు. వెలుపలిమూల యందున్న ధాన్యరాశియొక్క పరిధి 45 హస్తములు,

అ రాసులయొక్క ఘనహస్తములను వేర్వేరుగ శీఘ్రముగ నాకు చెప్పుము.

న్యాసః. అత్రాద్యస్య పరిధిః ౩౦ ద్విఘ్నః ౬౦ అన్యస్య ౧౫ చతుర్ఘ్నః ౬౦ తదితరస్య ౪౫ సత్రిభాగైక $\frac{4}{3}$ నిఘ్నః ౬౦ ఏభ్యః ఫలం ౬౦౦ స్వస్వగుణేన భక్తం జాతం పృథక్పృథక్ఫలం ౩౦౦, ౧౫౦, ౪౫౦॥ ఇతి రాశివ్యవహారః



భిత్తిసంలగ్న రాశిపరిధి 30 దీనిని రెట్టింప 60 దీనివలననైన పూర్ణధాన్యఘనహస్తములు $(\frac{60}{10})\times(\frac{60}{6})^2 = 6\times100 = 600$ దీనిని 2చే భాగింప 300

ఇట్లు భిత్త్యంతఃకోణసంలగ్న రాశిపరిధి 15 దీనిని 4చే గుణింప 60 దీనిచేతనైన పూర్ణధాన్యఘనహస్తసంఖ్య 600 ను 4చే భాగింప 150

భిత్తిబహిఃకోణసంలగ్న రాశిపరిధి 45ని $\frac{4}{3}$చే గుణింప $\frac{45}{1}\times\frac{4}{3} = 60$ దీనివలననైన పూర్ణధాన్యఘనహస్తసంఖ్య 600ను $\frac{4}{3}$చే భాగింప 450

ఇట్లు అంకెలను గ్రహింపవలయును.

ఉపపత్తి: భిత్తిలగ్న రాశి పరిధ్యర్థముతో కూడియున్నది. అంతఃకోణస్థరాశిపరిధి పరిధిచతుర్థాంశముగ నున్నది. బహిఃకోణస్థరాశి రాశిపరిధిలో ముప్పాతిక పరిధి అగుచున్నది. ఇట్లు ఆయా రాశిపరిమాణములు క్రమముగ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ గాను అగుచున్నవి. కావున మొత్తము పరిధివలన మొత్తపు పరిమాణమును తెలిసికొని దానివలన ఆయా రాశిభాగములు తెలిసికొనవలెను.

ఇది రాశివ్యవహారము 28 ప్రకరణము.

ఛాయావ్యవహారము.

20వ ప్రకరణము.

అథ ఛాయా వ్యవహారే కరణ సూత్రం వృత్తం

ఛాయయోః కర్ణయో రంతరే యే తయో ర్వర్గవిశ్లేషభక్తా రసాద్రీషవః।
సైకలబ్ధేః పదఘ్నం తు కర్ణాంతరం భాంతరేణోనయుక్తం తదర్ధే స్ఫుటే ప్రభే॥125

టీ॥ రసాద్రీషవః = (రస = 6, అద్రి = 7, ఇషు = 5) 576, ఛాయయోః = ఛాయలయొక్క యొక్క, కర్ణయోః = కర్ణములయొక్క యొక్క, యే = ఏ, అంతరే = అంతరములుగలవో, తయోః = ఆ అంతరములయొక్క, వర్గవిశ్లేష భక్తాః = వర్గముల అంతరముచే భాగింపబడినవై (చేయబడినవి). కర్ణాంతరం = కర్ణముల అంతరము, సైకలబ్ధేః = ఒకటితో గూడిన లబ్ధముయొక్క, పదఘ్నం = మూలముచే గుణింపబడినది. భాంతరేణ = ఛాయల అంతరముచే, ఊనయుక్తం = ఒకచోట తీసివేయబడినది మరియొకచోట కలుపబడినదై (చేయబడినది). తదర్ధే = సగములు, ప్రభే = ఛాయలు, స్ఫుటే = అగుచున్నవి.

196. ప్ర (1) ఒకదాని కొకటి సమములైన రెండు ఛాయలయొక్క అంతరమును వాని కర్ణముల అంతరముచే భాగింపగా వచ్చిన లబ్ధముతో ఒకటి కలిపి దాని వర్గమూలముచే కర్ణాంతరమును గుణించి దానిలో ఛాయాంతరమును వేరువేరుగా తీసివేసి కలుపగా వచ్చిన వాని సగములు ఛాయలగును. (ఇందు ఛాయాకర్ణములను అంగుళములలో చెప్పుచున్నారు.) అట్లు రెండు ఛాయల యొక్క అంతరమును వాని కర్ణములయొక్క అంతరమును తెలిసినచో ఛాయలు తెలియవచ్చును.

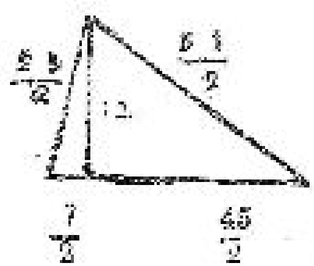
(2) ఛాయాంతరముయొక్కయు కర్ణాంతరముయొక్కయు వర్గముల అంతరముచే 576ను భాగింపుము. అట్లు భాగింపగా వచ్చిన లబ్ధమునందు 1ని కలిపి దాని వర్గమూలముచే కర్ణాంతరమును గుణింపుము. ఈ గుణనఫలమునందు ఛాయాంతరము నొకచోట కలుపుము. మరియొకచోట తీసివేయుము. వీని సగములు ఛాయలగును.

ఉదాహరణమ్

నందచంద్రైర్మితం ఛాయయో రంతరం కర్ణయో రంతరం
విశ్వతుల్యం యయోః। తే ప్రభే వక్తి యో యుక్తితో వేత్త్యసౌ
వ్యక్త మవ్యక్తయుక్తం హి మన్యే ఖిలం॥ 84॥

తా॥ రెండు ఛాయలయొక్కయు అంతరము 19 అంగుళములు. వాటి కర్ణముల యంతరము 13 అంగుళములు. ఆ ఛాయలను ఎవడు తెలుపునో వాడు బీజగణితముతో గూడిన వ్యక్తగణితమును తెలిసికొనుచున్నాడు. అని తలచుచున్నాను.

న్యాసః। ఛాయాంతరం 19 కర్ణాంతరం 13 అనయోర్వర్గాంతరేణానేన 192 భక్తా రసాద్రీషవః 576 లబ్ధమ్ 3 సైకస్యాస్య 4 మూలేన 2 గుణితం కర్ణాంతరం 26. ద్విష్ఠం 26 ఛాయాంతరేణానేనోనయుతం కృత్వా తదర్ధే లబ్ధే ఛాయే $\frac{7}{2}$, $\frac{45}{2}$ అతః కర్ణౌ $\frac{25}{2}$, $\frac{51}{2}$



ఛాయల అంతరము 19 అం. కర్ణముల అంతరము 13 అం. వీటివర్గాంతరము $(19+13)\times(19-13)=192$ దీనిచే 576ను భాగింప లబ్ధము 3. దీనికి 1ని కలుప 4. దీని మూలము 2 చే కర్ణాంతరము 13ను గుణింప 26 ఇం దొకచోట ఛాయాంతరమును కలిపియు మరియొకచోట వ్యవకలనము చేసియు సగించి $\frac{26+19}{2}=\frac{45}{2}$, $\frac{26-19}{2}=\frac{7}{2}$ అని ఛాయలు వచ్చెను. శంకువు 12 తో గూడిన త్రిభుజముగ కర్ణములు $\frac{51}{2}$, $\frac{25}{2}$ అగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: పైని యుదాహరణమునందలి క్షేత్రమునందు రెండు ఛాయలను ...ంగుళముల ... రెండు ... యిచ్చివేసి ... చూపబడినవి. కానిచే

ఛాయాయోగము భూమిగను కర్ణములు భుజములుగను బాహ్యకోణములకంటెను ఎంటు నుగను ఛాయలు అగ్రాగ్రములు గల త్రిభుజక్షేత్రము పైనది.

ఇంటి కల్పనచే ఛాయాంతర = ఛా.అం, కర్ణాంతరం = క.అం, అంబ = కం, ఛాయాయోగము = భూ, లఘుకర్ణ = లక, మహాకర్ణ = మక, లఘ్వా బాధా = లఘుఛాయా = లఛా, బృహదాబాధా = బృహచ్ఛాయా = మఛా, ఛాయాయోగ = భూ, ఛాయాంతర = ఛా.అం కావున బీజగణితముచే

$$\frac{భూ + ఛా.అం}{2} = మఛా; \quad \frac{భూ - ఛా.అం}{2} = లఛా \ (103 వ శ్లో. చే)$$

$$\because మక^2 - లక^2 = మఛా^2 - లఛా^2 \quad (163 వ శ్లో., ఉపపత్తి, 1 సూ.)$$

$$\therefore \frac{మఛా^2 - లఛా^2}{క.అం} = \frac{భూ \times ఛా.అం}{క.అం} = కర్ణయోగ \ (104 వ శ్లో. చే)$$

$$(103 \text{ వ శ్లో. చే}) \ లక = \frac{భూ.ఛా.అం - క.అం^2}{2\, క.అం}$$

$$(103 \text{ వ శ్లో. చే}) \ కం^2 = లక^2 - లఛా^2$$

$$= \frac{భూ^2.ఛా.అం^2 - 2భూ.ఛా.అం.క.అం^2 + క.అం^4}{4క.అం^2}$$

$$- \frac{భూ^2 - 2భూ.ఛా.అం + ఛా.అం^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{భూ^2.ఛా.అం^2 - 2భూ.ఛా.అం.క.అం^2 + క.అం^4 - భూ^2.క.అం^2 + 2భూ.ఛా.అం.క.అం^2 - క.అం^2.ఛా.అం^2}{4క.అం^2} \right.$$

$$= \frac{భూ^2(ఛా.అం^2 - క.అం^2) + క.అం^2(క.అం^2 - ఛా.అం^2)}{4క.అం^2} = కం^2$$

$$\therefore భూ^2(ఛా.అం^2 - క.అం^2) + క.అం^2(క.అం^2 - ఛా.అం^2) = కం^2 \times 4 \times క.అం^2$$

$$= భూ^2(ఛా.అం^2 - క.అం^2) - క.అం^2(ఛా.అం^2 - క.అం^2) = 4కం^2 \times క.అం^2$$

$$\therefore భూ^2(ఛా.అం^2 - క.అం^2) = 4కం^2.క.అం^2 + క.అం^2(ఛా.అం^2 - క.అం^2)$$

$$\therefore భూ^2 = \frac{4కం^2.క.అం^2 + క.అం^2(ఛా.అం^2 - క.అం^2)}{ఛా.అం^2 - క.అం^2}$$

$$= క.అం^2 + \frac{క.అం^2 \times 4కం^2}{ఛా.అం^2 - క.అం^2} = క.అం^2\left(1 + \frac{4కం^2}{ఛా.అం^2 - క.అం^2}\right)$$

ఇచట కం = 12 కావున 4 కం^{2} = $12^2 \times 4 = 576$

$$\therefore భూ = క.అం\sqrt{1 + \frac{576}{ఛా.అం^2 - క.అం^2}} \text{ అగుచున్నది.}$$

ఛాయాయోగము భూమి తెలియుటచే ఛాయాంతర మిదివరలో తెలియు బడిఅది కావున సంక్రమణముచే (103 వ శ్లో. చే) ఛాయలు తెలియబడుచున్నవి ఇట్లుపపత్తి సుస్పష్ట మగుచున్నది.

ఛాయాంతరే కరణసూత్రమ్

శంకుః ప్రదీపతలశంకుతలాంతరఘ్నశ్ఛాయా భవేద్వినరదీపశిఖౌచ్చ్యభక్తః

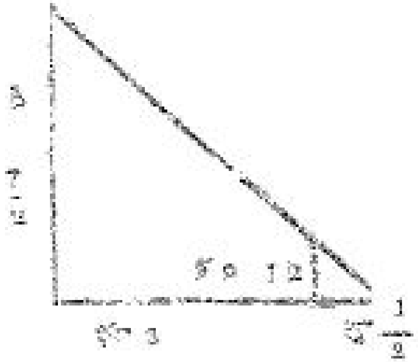
టీ॥ శంకుః = శంకువు, ప్రదీపతలశంకుతలాంతరఘ్నః = దీపమూలము యొక్కయు శంకుమూలము యొక్కయు మధ్యభూమిచే గుణింపబడినది, వినర దీపశిఖౌచ్చ్యభక్తః = శంకుమానముచే తీసివేయబడిన దీపము యొక్క (శిఖాగ్రము వరకున్న) ఔన్నత్యప్రమాణముచే భాగింపబడినది, ఛాయా భవేత్ = ఛాయ యగును.

197. వ శ్లో. శంకుప్రమాణము దీపమూలము యొక్కయు శంకుమూలము యొక్కయు మధ్యభూమిచే గుణించి దీపప్రమాణమునందు శంకుప్రమాణము వ్యవకలనముగా నగు శేషముచే భాగింప శంకువుయొక్క ఛాయాప్రమాణమగును.

ఉదాహరణమ్

శంకుప్రదీపాంతరభూస్త్రిహస్తా దీపోచ్ఛ్రితిస్సార్ధకరత్రయా చేత్।
శంకోస్తదా [illegible]ంగులసంమితస్య తస్య ప్రభా స్యాత్కియతీ వదాశు॥

తా॥ శంకువునకును దీపమునకును దూరము మూడు హస్తములు. దీపము యొక్క ఔన్నత్యము మూడున్నర హస్తములు. అట్టిచో 12 అంగుళములు ఎత్తుగల శంకువునకు ఛాయ ఎంతయుండును? శీఘ్రముగ చెప్పుము.

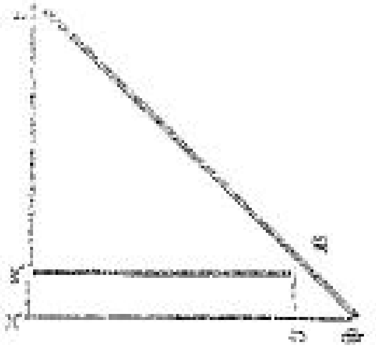


న్యాసః లబ్ధాని ఛాయాంగులాని ౧౬

ఇచట శంకుప్రమాణము 12 అంగుళములు, అనగా ½ హస్తము, దీప = 3½ హస్తములు, దీపమునకును శంకువునకును మధ్యనున్న భూమి 3 హస్తములు. పై సూత్రప్రకారము

$$\frac{శం \times భూ}{దీ - శ} = \frac{\frac{1}{2}\times 3}{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\times\frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$ హస్తము ఛాయ.

ఉపపత్తి: ఇఈ = శంకు, అగ = దీపోచ్ఛ్రాయము, గఈ = దీపశంక్వంతర భూమి, ఈఉ = ఛాయ, అ = దీప శిఖాగ్రము. శిఖాగ్రమునుండి శంక్వగ్రము ద్వారా [illegible] 'ఇ' బిందువునుండి భూమికి సమాంతరముగా [illegible] 'అకఇ' [illegible] త్రిభుజము, ఇంక 'ఇఈఉ' [illegible] త్రిభుజము చేయబడినది. కావున 'అకఇ' 'ఇఈఉ' అను [illegible] త్రిభుజములు అగుచున్నవి. సజాతీయ త్రిభుజములకు సాజాత్యము కావున



అక : కఇ :: ఇఈ : ఈఉ

ఇచట అక = అగ — ఇఈ, అగ = దీ, ఇఈ = శం, కఇ = భూ కావున

(దీ — శం) : భూ :: శం : ఛాయ

$$\frac{శం \times భూ}{దీ - శం}$$ = ఛాయ యగుచున్నది.

అథ దీపోచ్ఛ్రితి జ్ఞానయనం

ఛాయాహృతేతు నరదీపతలాంతరఘ్నే।
శంకౌ భవేన్నరయుతే ఖలు దీపకౌచ్యం॥ ౧౭౬॥

టీ॥ శంకౌ = శంకువు, నరదీపతలాంతరఘ్నే = దీపమునకును శంకువునకును మధ్యభూమిచే గుణింపబడినదై, ఛాయాహృతే = ఛాయచే భాగింపబడినదై, నరయుతే = శంకువుతో కలుపబడినదైనచో, దీపకౌచ్యం = దీపో[illegible] [illegible]!

198. ప్ర. దీపమునకును శంకువునకును మధ్యభూమియు శంకువు ఛాయయు తెలిసినచో దీపప్రమాణము తెలియుటకు

దీపశంకువుల మధ్యభూమి ప్రమాణముచే శంకుమానమును గుణించి దానిని ఛాయచే భాగించి లబ్ధమునందు శంకుమానమును కలిపినచో దీపము యొక్క ఎత్తగును.

ఉపపత్తి: $\frac{శం \times భూ}{దీ - శం}$ = ఛాయ (197 ప్ర. చూ.).

∴ శం × భూ = (దీ — శం) × ఛా

∴ $\frac{శం \times భూ}{ఛా}$ + శం = దీ అగుచున్నది.

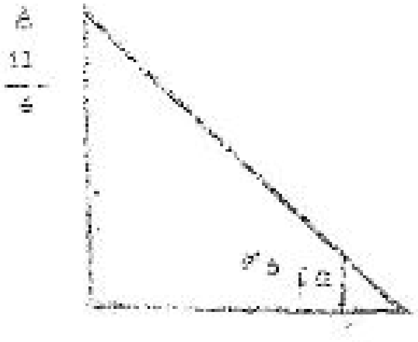
ఉదాహరణమ్

ప్రదీపశంక్వంతరభూ స్త్రిహస్తా ఛాయాంగులైః షోడశభి స్సమాచేత్! దీపోచ్ఛ్రితి స్స్యాత్కియతీ వదాశు ప్రదీపశంక్వంతర ముచ్యతాం మే॥ ౧౭౭॥

న్యాసః: శంకుః ౧౨ ఛాయాంగులాని ౧౬. శంకుప్రదీపాంతర హస్తాః ౩ లబ్ధం దీపకౌచ్యం హస్తాః ౨ అంగులాని ౧౮

తా॥ (1) దీపశంకువుల మధ్యభూమి 3 హస్తములు, ఛాయ 16 అంగుళములు. దీపోన్నత్య మెంతయుండును? శీఘ్రముగ చెప్పుము.

(2) [illegible]



[illegible]

[illegible]

200. ప్ర. (1) [illegible]

(2) [illegible]

(౪) [illegible] ఛాయచే (ఇవకలో [illegible]) భాగించ [illegible] కును.

ఇట్లు [illegible] చెప్పబడిన గణితము [illegible] త్రైరాశికముచే [illegible].

ఉదాహరణమ్

శంకో ర్భార్కమితాంగులస్య సుమతే దృష్టాకిలాష్టాంగులా
ఛాయాగ్నిభిముఖే కరద్వయమితే న్యస్తస్య దీపే పునః।
శంకోస్తస్య దినార్కమితాంగులా యది తదా ఛాయాప్రదీపాంతరం
దీపౌచ్చ్యంచ కియద్వద వ్యవహృతిం ఛాయాభిధాం వేత్సి చేత్ ॥౨౦౫॥

తా॥ [illegible]! 12 అంగుళములుగల శంకువొక్క ఛాయ 8 అం [illegible] 12 అంగుళములుగల [illegible] ఛాయావ్యవహారము [illegible].

న్యాసః అత్రిభాభాగ్రహరా [illegible]
[illegible]
ఛాయాప్రమాణాంతరేణ భక్తా లబ్ధం భూమాన [illegible]
[illegible]

[illegible]

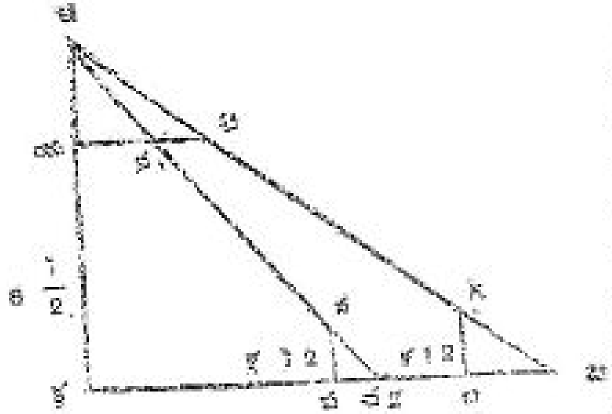
[illegible] 2 హస్తములు [illegible] 2 × 24 = 48 అంగుళములు. [illegible] ఛాయాగ్రముల యంతరము 52 అంగుళము [illegible] 8 అం, [illegible] 12 అం, [illegible]

[illegible] ఛాయాగ్రాంతరము 52 చే గుణించ 416 [illegible] ఛాయల యంతరము 12 — 8 = 4 చే భాగించ 104 ఇది భూమి. [illegible]

ఇట్లు [illegible] 12ను ఛాయాగ్రాంతరము 52 చే గుణించ [illegible] ఛాయాంతరము 4 చే భాగించ 156 ఇది [illegible].

[illegible] 104ను [illegible] గుణించ 1248 [illegible] 8 చే భాగించ 156 [illegible].

ఇట్లు [illegible] 156ను [illegible] 156 [illegible].



[illegible] 12, [illegible] 2 హస్తములు, [illegible] 52 అంగుళములు. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

కుట్టకవ్యవహారము.

21వ ప్రకరణము

201. ప్ర. నిర్వచనము.

[illegible]

202. ప్ర. [illegible]

[illegible]

[illegible]

203. ప్ర. [illegible]

[illegible]

ఉదాహరణమ్.

[illegible]

1	[illegible]
2	[illegible]
3	[illegible]
0	[illegible]

$$\frac{221 \times \text{[illegible]} + 65}{195} = \text{[illegible]}$$

[illegible]

[illegible] 221 [illegible] 195 [illegible] 13 [illegible]

```
15) 17 (1
    15
    --
     2) 15 (7
        14
        --
         1
```

[illegible]

1
7
5
0

[illegible] 5 [illegible] 7 [illegible] 35 [illegible] 1, 35, 5 [illegible] 35 [illegible] 40 [illegible] 35 [illegible] 17 [illegible] 15 [illegible] 6, 5 [illegible]

[illegible] (209 [illegible]) [illegible]

[illegible] $(1 \times 17 + 6) = 23$ = [illegible], $(1 \times 15 + 5) = 20$ = [illegible]

[illegible] $(2 \times 17 + 6) = 40$ = [illegible], $(2 \times 15 + 5) = 35$ = [illegible]

[illegible]

$$\frac{221 \times \text{[illegible]} + 65}{195} = \text{[illegible]} \qquad \text{[illegible]} = 5,\ \text{[illegible]} = 6$$

$$\frac{221 \times 5 + 65}{195} = \frac{1105 + 65}{195} = \frac{1170}{195} = 6$$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

205. [illegible] (1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

ఉదాహరణమ్.

[illegible]॥ ౧౧౧॥

శ్లో॥ 100ను ఏ సంఖ్యచే గుణించి 90ం కలిపి 63 చే భాగించిన [illegible]

న్యాసః. భాజ్యః ౧౦౦ హారః ౬౩ క్షేపః ౯౦ [illegible]

౧
౬
౩
౫
౦

[illegible]

అథవా [illegible]

౧౪
౩
౧౦
౦

అథవా [illegible]

౧
౨
౧
౦

[illegible]

[illegible] ౧౩౦ అథవా [illegible] ఇత్యాది.

ఉదా: భాజ్యము100 హారము63 క్షేపము90

[illegible] 1, 1, 1, 2, 2, 1 [illegible]

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
1	1	1	1	1	1	2430	రాశి
1	1	1	1	1	1530	1530	యుగ్మం
1	1	1	1	900	90		
2	2	2	630	630			
2	3	270	270				
1	90	90					
90	90						
0							

పైరాశి 2430ని భాజ్యము 100చే భాగింపగా శేషము 30 లబ్ధము

క్రిందిరాశి 1530ని హారము 63చే భాగింపగా శేషము 18 గుణకము.

[illegible] (200 పు, చూ) [illegible]

[illegible] 10చే [illegible]

[illegible] 0, 5, 3 [illegible] 27, 171 [illegible]

27ను భాజ్యము 10చే [illegible] శేషము7 క్రిందిరాశి 171ని హారము 63చే [illegible] 45 శేషము. [illegible] (204 పు 6 చూ) [illegible] 10 — 7 = 3 ఇట్లు 63 — 45 = 18 [illegible] 10చే [illegible] 18 గుణకము.

0
5
3
9
0

[illegible]

14
8
10
0

[illegible]

1
2
1
0

[illegible]

(209 [illegible]) [illegible] 130

2 [illegible] 130

[illegible]

206. [illegible] (204 [illegible]) [illegible] (203 [illegible])

[illegible]

[illegible] 18, [illegible] 30 [illegible] 63 — 18 = 45 [illegible] 100 — 30 = 70 [illegible] (203 [illegible])

1 [illegible] $1 \times 63 + 45 = 108$ [illegible] $1 \times 100 + 70 = 170$ [illegible]

2 [illegible] $2 \times 63 + 45 = 171$ [illegible] $2 \times 100 + 70 = 270$ [illegible]

[illegible]

[illegible] 18 [illegible] 18 [illegible]

[illegible]

4
1
1
1
1
16
0

[illegible] — 8 = 52 [illegible] 18 — 2 = 11 [illegible]

[illegible]

కుట్టకాంతరే కరణసూత్రం సార్ధవృత్తం

గుణలబ్ధ్యోః సమం గ్రాహ్యం ధీమతా తక్షణే ఫలం ॥ ౧౩౬ ॥
హరతష్టే ధనక్షేపే గుణలబ్ధీ తు పూర్వవత్ ।
క్షేపతక్షణలాభాఢ్యా లబ్ధిః శుద్ధౌ తు వర్జితా ॥ ౧౩౭ ॥

[illegible]

207. [illegible]

[illegible]

ఉదాహరణమ్.

యేన సంగుణితాః పంచ త్రయోవింశతిసంయుతాః ।
వర్జితా వా త్రిభిర్భక్తా నిరగ్రాః స్యుః స కో గుణః ॥ ౧౩౮ ॥

[illegible]

౧
౧
౨౩
౦

[illegible]

1
1
23
0

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
71 ) 173 ( 2
     142
     ---
      31 ) 71 ( 2
           62
           --
            9 ) 31 ( 3
                27
                --
                 4 ) 9 ( 2
                     8
                     -
                     1
```

[illegible]

$$\frac{9\times 3-5}{2} = \frac{(8+1)3-5}{4} = \frac{8\times 3}{4} + \frac{3-5}{4} = 3\times 2 + \ldots$$

[illegible]

2	2
2	2
3	3
2	5
3	3
0	

[illegible] 31 = 27 + 4 [illegible]

$$\frac{(9\times 8)-2}{4} = 6 \text{ కాబట్టి } \frac{(4\times 6)+3}{9} = 3 \text{ అగుచున్నది.}$$

$$\therefore \frac{(31\times 6)+3}{9} = \frac{(27+4)6+3}{9} = \frac{27\times 6}{9} + \frac{4\times 6+3}{9} = 3\times 6+3$$

[illegible]

2
3
21
6

[illegible]

[illegible]

$$\frac{31\times 6+3}{9} = 21 \quad \therefore \quad \frac{9\times 21-5}{31} = 6$$

$$\therefore \frac{71\times 21-5}{31} = \frac{62\times 21}{31} + \frac{9\times 21-5}{31} = 2\times 21+6$$

[illegible]

2
48
21

[illegible] 173 [illegible]

$$\frac{71\times 21-5}{31} = 48 \quad \therefore \quad \frac{31\times 48+3}{71} = 21$$

$$\therefore \frac{173\times 48+3}{71} = \frac{142\times 48}{71} + \frac{31\times 48+3}{71} = 2\times 48+21 = 117$$

2
48
21

[illegible] 48 [illegible] 117 [illegible]

117 [illegible] 48 [illegible]

[illegible]

[illegible] (1లో) [illegible]

[illegible]

[illegible] 1, 3 [illegible]

[illegible]

[illegible] ఉదాహరణ $\frac{భా \times హా}{హా} =$ భా, [illegible]

[illegible] "ఇష్టాహతస్వస్వహారేణ" [illegible] (209 సూ) [illegible]

[illegible]

(10) "[illegible]" (209 సూ) [illegible] ఉపపత్తి.—

కుట్టకపద్ధతిచే భా × గు ± క్షే = హా × ల

[illegible] ఇష్టాంకము = ఇ, [illegible]

$$\frac{భా \times గు}{ఇ} \pm \frac{క్షే}{ఇ} = \frac{హా \times ల}{ఇ}$$

[illegible]

అనగా $\frac{భా \times గు}{ఇ} \pm \frac{క్షే}{ఇ} = \frac{హా \times ల}{ఇ}$ అగుచున్నది.

[illegible]

[illegible]

అనగా $\frac{భా \times గు}{ఇ} \pm \frac{క్షే}{ఇ} = \frac{హా \times ల}{ఇ}$ అగుచున్నది.

[illegible]

అథ స్థిర కుట్టకః

[illegible]

[illegible]

210. సూ. (1) [illegible]

(2) [illegible] (204 సూ, 209 సూ, చూ.)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

60 విలిప్తలు	1 లిప్త	200 లిప్తలు 1 నక్షత్రపాదము	
60 లిప్తలు	1 భాగ	4 పాదములు (800 లిప్తలు) 1 నక్షత్రము	
30 భాగలు	1 రాశి	2¼ నక్షత్రములు (9 పాదములు) 1 రాశి	
12 రాసులు	1 భగణము	27 నక్షత్రములు 1 భగణము	

(8) [illegible]

(4) [illegible]

[illegible]

	ది	ఘ	వి	ప	విప
సిద్ధాంతశిరోమణియందు సౌరమాన ప్రమాణము.	30	28	17	31	$51\frac{1}{2}$
,, చాంద్రమాన ప్రమాణము.	29	31	50		

[illegible]

[illegible]

ఇట్లు యో = ఘ. శే అగునో $\frac{\text{యో} \times 60 - \text{క. శే}}{\text{కహ}}$ = కలలు.

ఇట్లు యో = క. శే అగునో $\frac{\text{యో} \times 30 - \text{భా. శే}}{\text{కహ}}$ = భాగలు.

ఇట్లు యో = భ. శే అగునో $\frac{\text{యో} \times 12 - \text{రా. శే}}{\text{కహ}}$ = రాసులు.

ఇట్లు యో = అహ. అగునో $\frac{\text{యో} \times \text{కల్ప} - \text{భ. శే}}{\text{కహ}}$ = గత

ఈవిధముగ కుట్టకమునందు గుణక సామ్యముగా నుండుచున్నది. ఇట్లు గుణక లబ్ధములను తెలిసికొనుటచే క్రిందినుండి గతభగణములు, రాసులు, భాగలు, కలలు, వికలలు, వికలావశేషము, తెలియబడుచున్నవి. ఇదియే గ్రహము నగుచున్నది.

(8) $\frac{\text{కల్పాధిమాస} \times \text{గతసౌరదిన}}{\text{కల్పసౌరదిన}}$ = లబ్ధము గతాధిమాసములు.

శేషము అధిమాసశేషము. కావున యో = గతసౌరదిన అగునో

$$\frac{\text{యో} \times \text{కల్పాధిమాస} - \text{అధిమాసశేష}}{\text{కల్పసౌరదిన}} = \text{గతాధిమాస}$$

ఈ కుట్టకముచే గతాధిమాసములను గతసౌరదినములను తెలియును.

ఇట్లు $\frac{\text{కల్పావమ} \times \text{గతచాంద్రదిన}}{\text{కల్పచాంద్రదిన}}$ = లబ్ధము గతావమదినములు

శేషము అవమశేషము. కావున యో = గతచాంద్రదిన అగునో

$$\frac{\text{యో} \times \text{కల్పావమ} - \text{అవమశేష}}{\text{కల్పచాంద్రదిన}} = \text{గతావమదిన}$$

ఇట్లు కుట్టకముచే గుణ లబ్ధములను గతచాంద్రదిన గతావమదినములు తెలియుచున్నవి. ఇట్టి పద్ధతి అంకెలయందు ఉపపన్నము నగుచున్నది.

పై వ్యవహారమున యో = గుణక అట్లు కల్పించి చూపబడినది.

(9) ఇట్లు కుట్టకము చేయుటలో శుద్ధిగా (యోగక్షేపముగ) కల్పించవలసిన వికలావశేషము అధిశేషము మొదలగునవి కొన్ని సంఖ్యాస్థానములు గలిగి యుండును.

కావున 1తో క్షేపముగా గల్పించి చేయుటవలననైన గుణలబ్ధములను క్షేపముచే గుణించి తదుపరి హారములచే భక్తించగా వచ్చిన శేషములు గుణలబ్ధము లగునని సులభ పద్ధతి చెప్పబడినది. ఇదియు దీనికి గ్రహగణితమున సామాన్యము.

(10) విశేషము:—(మ. మ. శ్రీ, కాశీదేవ శాస్త్రిగారు.)

పైపద్ధతిగ వికలావశేషమును బట్టి కుట్టకము చేయుటలో భూదినహార క్షేపములు వ్యస్తములైన యెడల సమవర్త్తింపబడునో యథార్థమగు గుణకలబ్ధములు సరియైనవి యగుచున్నవి. (209 పు. చే) కుట్టకముగుణిత గుణకలబ్ధముల తప్పుచేయుటలో లబ్ధము వికలలు 30కంటె అధికముగును. గుణకము కలావశేషము కల్పభగణములకంటె నధికము. కావున తదుపరి తదుపరిహారములకంటె తక్కువగు గుణకలబ్ధములు వచ్చునో అదియే సరియగు గుణకలబ్ధము అని గ్రహింపవలెను.

ఎచట భూదినహారక్షేపము లపవర్త్తింపబడినదో అచట 60కంటె తక్కువ సంఖ్యగల లబ్ధములు (209 పు. చే) ఆనేకవిధములు అగుచున్నవి. అందు ఏది సరియగు లబ్ధియో దాని నెట్లు గ్రహింపవలయును. సరియైన పద్ధతియు కొనితియును యుండునట్లు తెలియును. ఎట్లనగా: ఉపగణితక కుట్టకము చేయ కష్టము పూర్వము తెలియబడిన గుణలబ్ధములు సరియైనవి కావని అగుణకమును యోగక్షేపముగ కల్పించి చేసిన కుట్టకమునందు భూదినహారము అపవర్త్తించబడి క్షేప మపవర్త్తింపబడక యుండును. దానిచే అకుట్టకము ఖిలమగుచున్నది. ఇట్లు వీగుణలబ్ధముల గ్రహించినయెడల యీకుట్టకములు ఖిలములు కాకయుండునట్లు అగుణకలబ్ధములు సరియైనవిగా గ్రహించవలయును. ఇట్లు తెలిసికొనుట చాల కష్టమగుటచే, కావున కల్పసావనదినములు భూదినము, వికలావశేషము యోగక్షేపము చక్రవికలలు (ఏకభగణమునకైన వికలిప్తలు 1296000) హారము. ఇట్లు కల్పించి కుట్టకము చేసినచో లబ్ధము భగణశేషము. గుణకము వికలాత్మక గ్రహము అగును. ఆ భగణశేషము యోగక్షేపము, కల్పగ్రహభగణములు భాజ్యము, కల్పసావనదినములు హారము, ఈ కుట్టకముచే లభించిన గుణకము అహర్గణము, లబ్ధము గతభగణములు అగుచున్నవి. ఇట్లు ఉదాహరణక్రమముచే సాధింపవలయును.

ఉదాహరణమ్

కః పంచనిఘ్నో విహృత స్త్రిషష్ట్యా సప్తావశేషోఽథ స ఏవ రాశిః।
దశాహతస్స్యాద్విహృతస్త్రిషష్ట్యా చతుర్దశాగ్రో వద రాశిమేనమ్॥ [illegible]

[illegible]

ఇతి లీలావత్యాం కుట్టకవ్యవహారః.

[illegible] 5 [illegible] 63 [illegible] 7 [illegible]

[illegible] 10 [illegible] 63 [illegible] 14 [illegible]

[illegible] $10 + 5 = 15$ [illegible]

[illegible] $14 + 7 = 21$ [illegible]

[illegible] 63 [illegible] 3 [illegible] 7 [illegible] 7, 28 [illegible] 2, 7 [illegible] 14 [illegible]

[illegible] 21 [illegible] 7 [illegible] 2, 1 [illegible] 3, 2 [illegible] 2 [illegible] 7 [illegible] 14 [illegible]

$$\frac{15 \times 14 - 21}{63} = \frac{210 - 21}{63} = \frac{189}{63} = 3$$

[illegible] $14 \times 5 \div 63$ [illegible] 7 [illegible]

$14 \times 10 \div 63$ [illegible] 14 [illegible]

[illegible]

213. [illegible] (1) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ఇతి కుట్టక వ్యవహారము 21వ ప్రకరణము.

అంకపాశవ్యవహారము.

22.వ పరిచ్ఛేదము.

౨౧౪. [illegible]

విన్యస్తాంకైస్సంఖ్యాయా విభేదే కరణసూత్రం వృత్తం.

స్థానాంతమేకాదిచయాంకఘాతః సంఖ్యావిభేదా నియతైస్స్యురంకైః।
భక్తోఽంకమిత్యాంకసమాసనిఘ్నః స్థానేషు యుక్తో మితిసంయుతిస్స్యాత్॥

[illegible]

[illegible]

౨౧౫. [illegible]

[illegible]

(౧) [illegible]

(౨) [illegible]

ఉదాహరణమ్

ద్వికాష్టకాభ్యాం త్రినవాష్టకైర్వా నిరంతరం ద్వ్యాదినవావసానైః।
సంఖ్యావిభేదాః కతి సంభవంతి తత్సంఖ్యకైక్యాని పృథగ్వదాశు॥

న్యాసః. ౨, ౮ అత్ర స్థానే ౨ స్థానాంతమేకాదిచయాంకఘాత ౧, ౨ ఘాతః ౨ ఏవం జాతౌ సంఖ్యాభేదౌ ౨ అథ [illegible] సమాసం ౧౦ నిఘ్నః ౨౦ అంకమిత్యానయా ౨ భక్తః ౧౦ స్థానద్వయే యుక్తో జాతం సంఖ్యైక్యం ౧౧౦.

ద్వితీయోదాహరణే న్యాసః. ౩, ౯, ౮ అత్రైకాదిచయాంకాః ౧, ౨, ౩ ఘాతః ౬ ఏతావంతస్సంఖ్యాభేదాః, ఘాతః ౬ అంకసమాసః ౨౦ హతః ౧౨౦, అంకమిత్యా ౩ భక్తః ౪౦ స్థానత్రయే యుక్తో జాతం సంఖ్యైక్యం ౪౪౪౦

తృతీయోదాహరణే న్యాసః ౨, ౩, ౪, ౫, ౬, ౭, ౮, ౯ ఏవమత్ర సంఖ్యాభేదాః చత్వారింశత్సహస్రాణి శతత్రయం వింశతిశ్చ ౪౦౩౨౦, సంఖ్యైక్యంచ చతుర్వింశతిశంఖాః త్రిషష్టిపద్మాని నవ నవతికోటయః నవనవతిలక్షాణి పంచసప్తతిసహస్రాణి శతత్రయం షష్టిశ్చ ౨౪౬౩౯౯౯౯౭౫౩౬౦

ఉ॥ 2, 8 ఈ యంకములచేతను 3, 9, 8 ఈ యంకములచేతను [illegible] భిన్నములైన అంకములచే గాని పరివర్తించుటవలన ఎన్ని సంఖ్యాభేదము లగును? ఆసంఖ్యాభేదముల యోగము ఎన్ని? శీఘ్రముగ [illegible] చెప్పుము.

(1) ఉదా. 2, 8 ఈ యంకములు ఉద్దిష్టములైనవి. వీటి స్థానములు 2. ఒకటి మొదలు స్థానసంఖ్యవరకునున్న అంకముల గుణనము $1 \times 2 = 2$. ఇది సంఖ్యాభేదములు. అనగా పరివర్తభేదము లగుచున్నవి. ఈ భేదసంఖ్యచేత ఉద్దిష్టాంకముల $2 + 8 = 10$ యోగమును గుణించి $2 \times 10 = 20$ దీనిని ఉద్దిష్టాంకములు 2 గావున ఈ పరిమితసంఖ్య 2 చే భాగించ $20 \div 2 = 10$ అగును. దీనిని ఉద్దిష్టస్థానములు 2 గావున 2 స్థానములందు స్థానభేదముగ వ్రాసి కలుపగా 110 పరివర్తభేదయోగ మగుచున్నది.

```
 10
10
---
110
```

మూలాఖ్య: 2, 8 వీటిని పరివర్తించిన రెండుభేదములే [illegible]. వాటిని కలుపగా 110 యోగ మగుచున్నది.

```
 28
 82
---
110
```

(2) ఉదా: 3, 9, 8 ఉద్దిష్టసంఖ్యలు. వీటి స్థానములు 3 గావున ఈ స్థానసంఖ్యవరకు [illegible] గుణనము $1 \times 2 \times 3 = 6$ ఇది పరివర్తభేదసంఖ్య. ఈ భేదసంఖ్య చేత ఉద్దిష్టాంకముల యోగము $3 + 9 + 8 = 20$ చే గుణించి [illegible] 3 చే భాగించ $\frac{6 \times 20}{3} = 40$ లబ్ధమగును. ఉద్దిష్టస్థానములు 3 గావున 3 స్థానములందు స్థానభేదముగ వ్రాసి కలుపగా సంఖ్యాభేదముల యోగ మగుచున్నది.

```
  40
 40
40
----
4440
```

మూలాఖ్య: పరివర్తభేదము 6 భేదము లగుచున్నవి. అన్నిటిని వరుసగా వ్రాసి ఆసంఖ్యల నన్నిటిని కలుపగా 4440 సంఖ్యాభేదముల యోగ మగుచున్నది. ఇట్లు అంతటను గ్రహించవలెను.

```
 398
 389
 893
 983
 938
 839
----
4440
```

(3) ఉదా:— ఉద్దిష్టాంకములు 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 స్థాన సంఖ్యవరకు గల్గిన [illegible] గుణనము $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320$ ఇది

పరివర్తభేదములసంఖ్య యగుచున్నది. దీని ఉద్దిష్టాంకముల యోగము $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44$ చే గుణించి ఉద్దిష్టాంకపరిమితి 8 చే భాగించ $\frac{40320 \times 44}{8} = \frac{40320 \times 11}{2} = 20160 \times 11 = 221760$ లబ్ధము.

దీనిని 8 స్థానములందును స్థానభేదముగ వ్రాసి కలుపగా

2463999975360 పరివర్తనముచే నైన సంఖ్యాభేదముల యోగ మగుచున్నది.

ఉపపత్తి:— 'అ' ఇట్టి ఒక వర్ణము మాత్రమే పరివర్తించుటకు ఒకే భేద మగుచున్నది. ఇట్లు అ, క ఈ రెండు వర్ణములను పరివర్తించుటకు అక అనియు కఅ అనియు రెండుభేదము లగుచున్నవి. ఈ రెండుభేదములందును [illegible] స్థానమునందు [illegible] వర్ణమును పరివర్తించుటకు గఅక, అగక, అకగ అనియు గకఅ, కగఅ, కఅగ అనియు [illegible] 6 భేదములు [illegible] లగుచున్నవి. ఇట్లు [illegible] అందును వర్ణములవల్లనైన [illegible] భేదములు [illegible] నాల్గవవర్ణమును నాల్గుస్థానములందును [illegible] చేర్చినచో [illegible] భేదము లగుచున్నవి. ఇట్లు మొత్తము నాలుగుస్థానములందును వేరువేరు వర్ణములను పరివర్తించుటచేసిన భేదములు 24 అగుచున్నవి. ఇట్లు [illegible] ఒకవర్ణముచేనైన భేదసంఖ్య 1 [illegible]. రెండువర్ణములచేనైన భేదసంఖ్యను విచారించగా [illegible] సంఖ్య 2ను పూర్వభేదసంఖ్య 1 చే గుణించగా వచ్చు సంఖ్యతో సమమగుచున్నది. ఇట్లు 3 స్థానములందును వర్ణములచేనైన భేదసంఖ్యయు [illegible] సంఖ్య 3ను పూర్వభేదసంఖ్యచే గుణించగా వచ్చు సంఖ్య $3 \times 2 = 6$ తో సమమగుచున్నది. ఇట్లు నాలుగుస్థానములందును వర్ణములను పరివర్తించగా భేదసంఖ్య పూర్వభేదసంఖ్య 6 చే స్థానసంఖ్య 4 ను గుణించగా వచ్చు సంఖ్య యగుచున్నది. ఇట్లు చూడగా [illegible] భేదసంఖ్యలు ఒకటి మొదలు స్థానసంఖ్యవరకును [illegible] అంకముల గుణనఫలములతో సమము లగుచున్నవి. ఇట్లు అంతటను గ్రహించవలెను. దీనిచే పరివర్తభేదముల [illegible] మగుచున్నది.

[illegible]

అన్యదుదాహరణమ్.

పాశాంకుశాహిడమరూకకపాలశూలైః ఖట్వాంగశక్తి
శరచాపయుతైర్భవన్తి। అన్యోన్యహస్తకలితైః కతి మూర్తిభేదాః
శమ్భోర్హరేరివ గదారిసరోజశంఖైః ॥ ౨౬౨॥

వ్యాఖ్య. స్థానాన్తమేకాపచితాంకఘాతః [illegible]
[illegible]

ఉ॥ (1) [illegible]

(2) [illegible] 10 [illegible] 10 [illegible]

(1) [illegible] $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ మూర్తిభేదము లగును.

[illegible]

(2) [illegible]

[illegible] 10 [illegible]

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3628800$ అగుచున్నది.

[illegible]

[illegible]

విశేషకరణసూత్రం వృత్తమ్.

యావత్స్థానేషు తుల్యాంకాస్తద్భేదైస్తు పృథక్కృతైః।
ప్రాగ్భేదా విహృతా భేదాస్తత్సంఖ్యైక్యం చ పూర్వవత్ ॥౨౬౩॥

Scanned by CamScanner

[illegible]

[illegible]

ఉదాహరణము.

[illegible]

ఇట్లు 1, 1 ఈ రెండును సమములై యున్నవి. కావున [illegible] 2 చే [illegible] 12ను భాగించ $12 \div 2 = 6$ ఇవి వాస్తవ భేదములు.

2	2	1	1
2	1	1	2
2	1	2	1
1	2	2	1
1	2	1	2
1	1	2	2
9	9	9	9

ఇట్లు [illegible] భేదయోగము [illegible]. ఎట్లనగా: [illegible] అంకయోగము($2 + 2 + 1 + 1 = 6$)చే [illegible] భాగించ $\frac{4}{6} \times 6 = 4$ దీనిని 4 స్థానముల [illegible] 9 9 9 9 అగుచున్నది. ఇట్లు [illegible] స్థానములు [illegible] యోగము చేయుట తగినది.

(2) ఉదా: 4, 8, 5, 5, 5 వీనిచే భేదములెన్ని? భేదయోగమెంత? ఇందు 5 స్థానములందు [illegible] (215 వ ప్రశ్న) [illegible] 120 [illegible] స్థానములందు [illegible] 6 చే భాగించ 20 భేదసంఖ్య వాస్తవమైనది యగుచున్నది. ఎట్లనగా:

48555, 55548, 55584, 55854, 58554
54558, 55485, 55845, 58545, 58455
55458, 54855, 45855, 45585, 45558
54585, 84555, 85545, 55485, 85554

108
108
108
108
108
1199988

ఈ భేదసంఖ్య 20 ను అంకయోగము($4 + 8 + 5 + 5 + 5 = 27$)చే గుణించి [illegible] 5 చే భాగించ $\frac{20}{5} \times 27 = 4 \times 27 = 108$ దీనిని 5 స్థానములందును స్థానభేదముచే వ్రాసి కలుపగా ప్రశ్నోక్త [illegible] సంఖ్యాభేదముల యోగము అగుచున్నది.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

([illegible]) [illegible] = [illegible] సంఖ్యాభేదము [illegible]

217. ప్ర. [illegible] (1) [illegible] (2) [illegible]

[illegible]

[illegible]

ఉదాహరణమ్.

[illegible]

[illegible]

[illegible] $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60480$ భేదసంఖ్య యగుచున్నది.

[illegible]

	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
18	117	216	315	414	513	612	711
27	126	225	324	423	522	621	
36	135	234	333	432	531		
45	144	243	342	441			
54	153	252	351				
63	162	261					
72	171						
81							

[illegible]

[illegible] శ్రీభాస్కరాచార్యులవారు [illegible].

[illegible]

నగుణో నహరో నకృతి ర్నఘనః పృష్టస్తథాపి దుష్టానాం।
గర్వితగణకబటూనాం స్యాత్పాతో౽వశ్య మంకపాశే౽స్మిన్॥ ౨౭౨॥

ఇతి లీలావత్యాం అంకపాశః.

తా॥ [illegible]

ఇది అంకపాశవ్యవహారము, ౧౩ ప్రకరణము.

యేషాం సుజాతి గుణ వర్గ విభూషితాంగీ
శుద్ధాఖిలవ్యవహృతిః ఖలు కంఠసక్తా।
లీలావతీహ సరసోక్తి ముదాహరంతీ
తేషాం సదైవ సుఖసంపదుపైతి వృద్ధిః ౨౭౩॥

ఇతి శ్రీభాస్కరీయే సిద్ధాంతశిరోమణౌ
లీలావతీసంజ్ఞః పాట్యధ్యాయః
సమాప్తః॥

తా॥ ఈశ్లోకమునకు లీలావతీగణితపరముగను [illegible] అర్థములు.

(౧) లీలావతీగణితపక్షము:— [illegible] (గణితశ్లోకములే కొందురు)

(౨) కన్యాపక్షము:— [illegible]

[illegible] తాత్పర్యము.

ఇతి శ్రీమత్ప్రసిద్ధ [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
శ్రీకృష్ణమూర్తిశాస్త్రినామధేయ [illegible]
[illegible] శ్రీభాస్కరాచార్యప్రణీత సిద్ధాంత
శిరోమణి పాట్యధ్యాయమగు లీలావతీగణితమునకు
ఆంధ్రవ్యాఖ్యానము సర్వంబును
సంపూర్ణము.

శ్రీ శ్రీ శ్రీ శ్రీ శ్రీ

[illegible] కృష్ణమూర్తిశాస్త్రిణాం।
ఆంధ్ర వ్యాఖ్యాం లీలావత్యాః శ్రీ రఘుపతేః కృపయా॥

భాస్కరాచార్య—నివాసస్థలము.

"ఆసీత్ సహ్యకులాచలాశ్రితపురే త్రైవిద్యవిద్వజ్జనే
నానాసజ్జనధామ్ని విజ్జడవిడే శాండిల్యగోత్రో ద్విజః॥"

ఇందు ఆచార్యులు తమనివాసము "విజ్జడవిడ"మని చెప్పికొని యున్నారు. దీనినే కొందరు "విజ్జలవిడ"మని చెప్పుచున్నారు. డ ల వర్ణములకును డ ల వర్ణములకును ప్రాయికముగ సంస్కృతమున అభేదముగా వ్యవహరించుట గలదుగావున దీన్ని పాఠభేదము గలుగవచ్చును.

ఈ ఆచార్యనివాసమును గూర్చి నృసింహదైవజ్ఞ లిట్లు వ్రాసి యున్నారు.

"సహ్యకులాచలో మహారాష్ట్రదేశే అస్తి. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] —వాసనావార్తికము.

మునీశ్వరదైవజ్ఞ లిట్లు వ్రాసియున్నారు.

"విజ్జడవిడం, విదర్భవిషయ [illegible] .... [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]"
—మరీచి భాష్యము.

పై వాక్యములందు విజ్జడవిడము విదర్భలోని దని నృసింహదైవజ్ఞులును, విజ్జలవిడము విదర్భలోనిదని మునీశ్వరులును, వ్రాసియుండిరి. ఈ విడగ్రామము గోదావరీనదీతీరమున గణేశపురి యను గల గ్రామమునకు [illegible] దూరమున నున్నదనియును చెప్పియున్నారు. సహ్యకులాచలమునందని శ్రీఆచార్యులే చెప్పికొనిరి.

ఆ విడగ్రామము భాస్కరుని కాలమున (క్రీ. శ. 1150 సం॥) జనపతియగు విజ్జలనృపతియొక్క రాష్ట్రములో చేరినదగుటచే విజ్జలవిడమని భాస్కరాచార్యులు చెప్పిరని వేంకటేశకేతకర గారు వ్రాసియున్నారు.

[illegible] విజ్జలరాజ్య [illegible] [illegible]।
శ్రీభాస్కరాచార్య [illegible] విజ్జలవిడవాస్య॥

కాని యెచటను శ్రీఆచార్యులు విజ్జలరాజుతో సంబంధము గలిగినట్లు చెప్పికొనలేదు. కావున [illegible] [illegible] విజ్జలుని విడ [illegible] నృసింహదైవజ్ఞ వ్యాఖ్య [illegible] [illegible] గ్రామము విడగ్రామముగ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] తోచుచున్నది. [illegible] విడ్, బంబిడే అని [illegible] గను చేయవలయును. (ప్రస్తావనము)

ఈవిడగ్రామము ఉజ్జయినీ యామ్యోత్తరరేఖయందు 19 అక్షాంశములలో నున్నది. ప్రస్తుతము నిజాం రాజ్యమునకు చేరియున్నది. దీనికి సహ్యపర్వతము దగ్గర లేకపోయినను సహ్యకుల పర్వతము సంబంధించియున్నది. ఇది గోదావరీప్రాంతము. ఈ గ్రామమునకు సమీపమున [illegible] [illegible] [illegible] గణేశ [illegible] గలదు. కావున భాస్కర నృసింహ మునీశ్వరులచే చెప్పబడిన గ్రామ మిదియేయని స్పష్టముగ తెలియుచున్నది.

ప్రశ్నోత్తరములు.

పుటలు,

26. (1) 18. (2) 225 (3) 323. (4) 8289.

27. (1) 829. (2) 836. (3) 490. (4) 1058.

44. (1) 45. (2) ర 9-3-0. (3) 5780. (4) 708.

62. (1) ఒ 121 శే 78 (3) ఒ 833 శే 827 (5) ఒ 995 శే 24
(2) ఒ 7 శే 814 (4) ఒ 100 శే 104 (6) ఒ8285 శే1139

62 (1) 14 [illegible] (3) రూ 8 [illegible]
(2) [illegible] 249 (4) రూ 0 [illegible]
(5) రూ 0-1-0

112, (1) 1832294500013 (3) 949309500
(2) 814592214083483 (4) 940150248831732

... (1) 232 [illegible] (3) 971858609
(2) 183 [illegible] (4) 38835388

117, (1) 19 (2) 20 (3) 187 (4) 250

118. (1) 13 1872239 (3) 52605588624-03625
(2) 6337910 35508 (4) 12300751215079?

118, (1) 5102250 8 [illegible] (2) 1130 [illegible]
(1) 8?00 (3) 258

120. (1) 8 (2) 3 [illegible]
(3) 4 (4) 12 (5) 13 (6) 11 (7) 18
(8) 168 (9) [illegible]

124, (1) 1980 (2) 5544 (3) 8840
(4) 25280840 (5) 4820 (6) 6352

125. (1) 300 (2) 393 (3) [illegible] 3, [illegible] 4, [illegible] 5, [illegible] (4) 353

పుటలు,

135. [1] $\frac{5}{15}$, $\frac{3}{15}$ [2] $\frac{65}{75}$, $\frac{69}{75}$ [3] $\frac{315}{1680}$, $\frac{600}{1680}$, $\frac{968}{1680}$.

[4] $\frac{147}{252}$, $\frac{140}{252}$, $\frac{144}{252}$ [5] $\frac{84}{28}$, $\frac{140}{28}$, $\frac{118}{28}$, $\frac{784}{28}$

[6] $\frac{24}{36}$, $\frac{18}{36}$, $\frac{27}{36}$

136. [1] $\frac{3}{2}$, [2] $\frac{14}{183}$; [3] $\frac{1}{19}$, [4] $\frac{1}{64}$ [5] $\frac{1}{128}$ = 0-0-1

146. [1] $\frac{28}{45}$ [2] $\frac{25}{6}$ [3] $\frac{1208}{663}$ [4] $\frac{25}{27}$

147. [1] $\frac{248}{315}$ [2] $\frac{3877}{4830}$ [3] $\frac{55}{12}$ [4] $\frac{43}{60}$ [5] $\frac{33}{60}$

[6] $\frac{8}{15}$ [7] $\frac{25}{31\frac{1}{4}}$ [8] $\frac{3}{7}$

150. [1] $\frac{77}{108}$ [2] 3 [3] $\frac{5}{8}$ [4] $\frac{1}{3}$ [5] $\frac{9}{448}$ [6] $\frac{812}{3}$

151. [1] $\frac{7}{80}$ [2] $\frac{3}{1}$ [3] $\frac{604}{99}$ [4] $\frac{4}{1}$ [5] $\frac{5}{2}$ [6] $\frac{6}{5}$

236. [1] $5\frac{1}{3}$ [2] 4 [3] $13\frac{1}{3}$ [4] $7\frac{1}{3}$ [5] 24 [6] 50
[7] 176 [8] 44

237. [1] 3-8-$8\frac{3}{10}$ [6] $62\frac{1}{2}$
[2] రూ $6\frac{1}{8}\frac{1}{0}$ [7] [illegible] $108\frac{1}{3}$
[3] 19.522 [8] $615\frac{0}{}$
[4] $518\frac{2}{15}$ [9] 2008—12—$7\frac{1}{2}$
[5] 385.7 [10] [illegible] $11\frac{1}{3}$

ప్రశ్నలు.

227. [11] 157-10-3 [16] 378-12-4 [illegible]
[12] 4-3-2 [17] రూ 33.853
[13] 11-12-6 [illegible] [18] 540-1-5.18
[14] 2-5-6 [19] 25960.012
[15] 57374-0-7 [illegible] [20] 28 [illegible]

247. [1] 150 గజములు [2] 707 [illegible] [3] 2175 [illegible] [4] 1-3-0 [illegible]
[5] 11-3-9 [illegible] [6] 15-13-8

256. [1] 18-15-4 [illegible] [2] 8-4-3 [illegible]

261. [1] ఆధారం $71\frac{1}{35}$, లబ్ధి $6\frac{24}{35}$ [2] ఆధారం $223\frac{371}{4423}$ లబ్ధి $73\frac{3859}{4423}$

327. [2] 42 [illegible] [3] 8.018375 = (57.28125 × .14)

328. [1] $22\frac{1}{3}$ [3] $50\frac{1}{3}$

344. [1] 800 చం [2] 600 [3] 1300 [4] 1000 [5] 565 7
[6] 80000 [7] 12,89 [8] .858385 [illegible] [9] .292372 [illegible]

450. [1] 25 [illegible] 73 [illegible] 385 [2] 28 [illegible] 32 [illegible] 806
[3] 152 [illegible] [illegible] 18868 [illegible]
[4] 893 [illegible] [illegible] 34285 [illegible]
[5] [illegible] 7954 [illegible] [illegible] 196863636 [illegible], [illegible] 2836449724512 [illegible]
[6] 15 [illegible] [illegible] [7] [illegible]
[8] [illegible] 30, [illegible] 160, [illegible] $\frac{378}{5}$, [illegible] $\frac{448}{5}$

[illegible] $\frac{12096}{5}$, [illegible] $\frac{288}{5}$, [illegible] $\frac{198}{5}$, [illegible]

[illegible] $\frac{180}{5}$, [illegible] $\frac{198}{5}$, [illegible] 88, ఫలం $\frac{25387}{5}$

తప్పొప్పుల పట్టిక.

పుట.	పంక్తి.	తప్పు.	సవరణ.
11	18	{ పూర్ణాంకము వర్గమూలం } Root of a rational number	{ Integral part of the root of a non squared number.
37	6	4564	4574
81	5	[illegible]	[illegible]
39	6	∴ 5 =	∵ 5 =
39	22	8016	8716
39	23	10840832	10040832
40	3	5868 × 10	5868 × 40
41	9	(71 × 10)	(81 × 10)
62	13	[illegible]	[illegible]
80	8	[illegible]	[illegible]
112	21	రూ 38963 లు	రూ 38803 లు
120	6	4934,48877	4935,48873
127	6	[illegible] $\frac{1}{8}$	[illegible]
140	20	[illegible]	[illegible]
141	1	$\frac{3}{5}+(\frac{3\times5}{5\times7})$	$\frac{3}{5}+(\frac{3\times4}{5\times7})$
151	13	[illegible] ÷	[illegible] ÷ [illegible]
153	12	1003	100.
156	4	2283	2288 [illegible]
166	10	$\frac{1}{\frac{\sqrt{8}+5}{1}}$	$\frac{1}{\frac{\sqrt{28}+5}{1}}$

పుట.	పంక్తి.	తప్పు.	ఒప్పు.
175	2	34535	34253
178	8	155.5 ÷ 3.5	158.25 ÷ 2.5
182	17	[illegible]	[illegible]
187	15	[illegible]	[illegible]
188	4	[illegible]	[illegible]
,,	,,	[illegible]	[illegible]
189	30	$\frac{6}{1}\times\frac{5}{7}$	$\frac{16}{1}\times\frac{5}{3}$
194	9	[illegible]	[illegible]
198	12	[illegible]	[illegible]
199	11	[illegible]	[illegible]
	13	[illegible]	[illegible]
200	3	$\times 20 \times 300$	$3 \times 20 \times 300$
204	8	—65	=63
207	4	$14^2 - 45 \times 4$	$14^2 - (45 \times 4)$
,,	25	[illegible]	[illegible]
208	2	[illegible]	[illegible]
,,	2	[illegible]	[illegible]
,,	13	[illegible]	[illegible]
,,	13	$2^2 \div 3 \times 2$	$2^2 \div (3 \times 2)$
,,	29	384 ÷ 6 84	384 ÷ 6 = 84
212	4	= 84	= 84—
215	5	$\frac{783}{84}$	$\frac{784}{84}$
,,	,,	$\frac{3864}{64}$	$\frac{3969}{64}$
,,	8	$\frac{783}{84}$	$\frac{784}{84}$

పుట.	పంక్తి.	తప్పు.	ఒప్పు.
218	17	[illegible]	[illegible]
218	8	[illegible]	[illegible]
,,	,,	[illegible]	[illegible]
	8	[illegible]	[illegible]
	12	[illegible]	[illegible]
	25	[illegible]	[illegible]
219	5	[illegible]	[illegible]
227	2	$\frac{1}{4} = 5$	$\frac{1}{4}^3 = 5$
233	5	[illegible]	[illegible]
235	15	16 : 32 : : 20 : [illegible]	16 [illegible] 32 ,, 208 [illegible]
,,	17	2 : 4 : : 6 : [illegible]	2 [illegible] 4 ,, 8 [illegible]
251	28	100	300
253	12	[illegible]	[illegible]
255	17	[illegible]	[illegible]
258	14	[illegible]	[illegible]
,,	15	[illegible]	[illegible]
260	15	[illegible]	[illegible]
262	7	[illegible]	[illegible]
264	31	[illegible] 100 [illegible]	[illegible] 100 [illegible] / [illegible] 100 [illegible] / [illegible] 200 [illegible]
266	24	[illegible]	[illegible]

పుట.	పంక్తి.	తప్పు.	సవరణ.
232	18	200 — 233	26 = 233
„	19	102 — 235	33 — 232
231	13	10 × 3 + 311 × 3	10 × 3 + 11 × 3
253	3	[illegible] / [illegible]	[illegible] / 3
254	10	103 [illegible]	10 [illegible]
304	7	[illegible] $\frac{8^2}{3}$	[illegible] $\frac{8^2}{3}$
„	8	$\frac{4^2}{2} \div \frac{4}{2} = 10 \ldots$	$\frac{4^2}{2} + \frac{4}{2} = 10$ „
308	15	2, 3, 2, 0	2, 3, 0
312	22	([illegible] — 1)[illegible] 4	([illegible] — 1)[illegible] + 4
„	„	(— 1)[illegible] [illegible]	([illegible] — 1)[illegible] + [illegible]
332	12	[illegible]	[illegible]
353	5	[illegible]	[illegible]
„	5	[illegible]420	[illegible]415
411	22	[illegible]	[illegible]
433	6	[illegible]	[illegible]
450	18	450	850
457	7	[illegible]	[illegible]
458	12	25 [illegible]	25 [illegible]
533	17	$\frac{81 \quad 46 + 3}{71}$	$\frac{81 \times 46 + 3}{71}$

శేషించిన తప్పొప్పులు.

[illegible]

పు. పం.

17 10 [illegible] (16) [illegible]

(16) [illegible]

43 9 [illegible]

43 19 [illegible]

244 9 [illegible]

374 12 [illegible] 7 [illegible] 9 [illegible] 108 ÷ 9 = 21 [illegible]

క్షేత్ర చిత్రములలో ([illegible]) సవరణలు.

379 [illegible] 'ద' [illegible]

405 [illegible]

417 [illegible] 126 [illegible] 'ఇ' [illegible] 'ర' [illegible]

పు	పం	తప్పు	సవరణ	పు	పం	తప్పు	సవరణ
1	8	[illegible]	[illegible]	62	13	4 — 16	4^2 — 16
35	7	1280	1420		15	4 — 14	4^2 — 14
41	9	$\frac{(65 \times 100)}{(72 \times 10)}$	$\frac{(67 \times 100)}{(81 \times 10)}$		17	4 [illegible]	4^2 — [illegible]
42	14	[illegible]	[illegible]	63	21	[illegible]	[illegible]
55	15	[illegible]	[illegible]	70	2	[illegible]	[illegible]
62	19	4 [illegible]	$\frac{1}{4}$ [illegible]	71	21	1150	1160
				93	6	[illegible]	[illegible]

పుట.	పంక్తి.	తప్పు.	సవరణ.
232	18	200 — 233	95 = 233
,,	19	102 — 235	93 — 238
281	13	10 × 5 + 311 × 3	10 × 5 + 11 × 3
255	3	[illegible]	[illegible] / 3
257	10	[illegible]	[illegible]
304	7	$\frac{3^2}{3}$	$\frac{3^2}{3}$
,,	8	$\frac{4^2}{2} \div \frac{4}{2} = 10 \ldots$	$\frac{4^2}{2} + \frac{4}{2} = 10$,,
308	15	2, 8, 2, 0	2, 2, 0
312	22	(–1)² 4	(–1)² + 4
,,	,,	(–1)² 8	(–1)² + 8
332	12	[illegible]	[illegible]
352	5	[illegible]	[illegible]
,,	8	[illegible]320	[illegible]315
411	22	[illegible]	[illegible]
432	6	[illegible]	[illegible]
450	18	450	350
457	7	[illegible]	[illegible]
458	42	25 [illegible]	25 [illegible]
505	17	$\frac{81 \quad 46 + 3}{71}$	$\frac{81 \times 46 + 3}{71}$

శేషించిన తప్పొప్పులు.

[illegible]

పు. పం.

17 10 [illegible] (16) [illegible]
(16) [illegible]

43 9 [illegible]

48 19 [illegible]

244 9 [illegible]

374 12 [illegible] 7 [illegible] 9 [illegible] 103 ÷ 9 = 21 [illegible]

[illegible]

378 [illegible]

405 [illegible]

417 [illegible] 126 [illegible]

పు	పం	తప్పు	సవరణ
1	8	[illegible]	[illegible]
35	7	1250	1430
41	9	(65 × 100) / (73 × 10)	(67 × 100) / (81 × 10)
42	14	[illegible]	[illegible]
55	15	[illegible]	[illegible]
62	19	4 [illegible]	$\frac{1}{4}$ [illegible]

పు	పం	తప్పు	సవరణ
62	13	4 — 16	4^2 — 16
	15	4 — 14	4^2 — 14
	17	4 [illegible]	4^2 — [illegible]
63	21	[illegible]	[illegible]
70	2	[illegible]	[illegible]
71	21	1150	1169
93	6	[illegible]	[illegible]

పు.	పం.	తప్పు	ఒప్పు
56	2	(19)	(9)
82	7	[illegible]	[illegible]
92	3	[illegible]	[illegible]
94	22	625 × 12 =	425 × 12 × 8 =
116	25	57 [illegible]	38 [illegible]
130	21	[illegible]	[illegible]
138	11	[illegible]	[illegible]
169	8	7 = 70	7 — 70
170	3	4 ¼ [illegible]	4 ¼ [illegible]
	4	2 [illegible]	[illegible]
	12	061 [illegible]	.064 [illegible]
172	9	457 389	457,389
	11	545 97	545,97
	20	970 [illegible]	.970 [illegible] .3
	21	380	.380
	22	57	.57
	23	9	.9
	24	987	.987
178	14	9876	.9876
	15	$\frac{32.0300}{.9876}$	32.0300 / .9876
185	8	[illegible]	[illegible]
198	13	[illegible]	[illegible]
	15	[illegible]	[illegible]
199	5	[illegible]	[illegible]
200	4	[illegible]	[illegible]
	8	[illegible] ×	[illegible] 6 ×
219	13	$(\frac{[illegible]}{2})^2$	$(\frac{1}{[illegible]})^2$
„	„	$(\frac{[illegible]}{2})^2$	$(\frac{1}{[illegible]})^2$
222	16	[illegible]	[illegible]

పు.	పం.	తప్పు	ఒప్పు
225	22	$\frac{[illegible] \times 2 \times [illegible]}{15 \times 3}$	$\frac{[illegible] \times 2 \times [illegible]}{15 \times 3}$
262	9	94 [illegible]	94 [illegible]
275	14	[illegible]	[illegible]
	16	[illegible]	[illegible]
278	18	[illegible]	[illegible]
281	19	[illegible]	[illegible]
284	26	([illegible])	([illegible])
287	11	[illegible]	[illegible]
	12	[illegible]	[illegible]
306	18	[illegible] / 6	[illegible] / 6
315	8	[illegible] / 2	[illegible] / 2
320	10	$(4^3 - 3)$	$4^3 - 4)$
	22	[illegible]	[illegible] 5 [illegible]
322	12	[illegible]	[illegible]
330	17	[illegible] + [illegible]	[illegible] + [illegible]
	18	[illegible] + [illegible]	[illegible] + [illegible]
359	18	$\frac{31}{2} \times \frac{32}{2}$	$\frac{33}{2} \times \frac{12}{1}$
424	17	[illegible]	[illegible]
492	20	[illegible] — [illegible]	[illegible] — [illegible]
539	6	$\frac{3877}{4321}$	$\frac{4513}{4621}$
544	8	3, 2, 0	1, 3, 2, 0

భాస్కరాచార్య, b. 1114

లీలావతీ గణితము

విజయనగరం, 1936

Record no. 55

Bibliographic Record Target

భాస్కరాచార్య, b. 1114.

భాస్కరాచార్య విరచితమగు వాసనాభాష్య సహిత లీలావతీ గణితము పిడమర్తి కృష్ణమూర్తిశాస్త్రి ప్రణీతమగు ఆంధ్రవ్యాఖ్యానము. - 1 కూర్పు. - విజయనగరం : విద్యాముద్రాక్షరశాల, 1936.

ll, (1), 2, 2, iii, v, xiii, lll, 546 p. :port. : 22 cm.

Record no. 55

Bhāskarācārya, b. 1114.

Bhāskarācārya viracitamagu vāsanābhāṣya sahita Līlāvatī ganitamu / Piḍamarti Kṛṣṇamūrtiśāstri praṇītamagu Āṃdhravyākhyānamu. - 1 kūrpu. - Vijayanagaraṃ : Vidyāmudrākṣaraśāla, 1936.

ll, (1), 2, 2, lll, v, xiii, iii, 546 p. :port. ; 22 cm.

Record no. 55